

Prova I, Calc 3 – Albert Fisher – Física – 26 de maio de 2023

Justifique suas respostas! Coloque o seu nome! Boa sorte!

Nota: 1, 3, e 4 valem 3 pontos. 2 e 5 valem 2 pontos. Tem 13 pontos possíveis.

(1) Uma função linear f de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2$ está definido por:

$f(x, y) = (u, v)$ onde $u = x - y$ e $v = x + y$.

Considere a região B que o quadrado $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

(a) Desenhe a imagem $f(B)$.

(b) Qual é a área do $f(B)$? Qual é a área do $f(f(f(B)))$?

(c) Qual é a área do $f^{-1}(B)$, a imagem pela função inversa?

(2) Inverta a ordem de integração.

$$\int_{-2}^2 \left(\int_{-8}^{x^3} f(x, y) dy \right) dx$$

(3) Evaluate o integral sobre a região B , o paralelograma com vertices $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 2)$ e $(-1, 1)$.

$$\int \int_B (x^2 - y^2)^{1/3} dx dy$$

(4)

Dado as funções

$$F(x, y, z) = 2x + y + z$$

$$G(x, y, z) = xy - z + 2$$

e dado constantes c, d , considere as superfícies de nível $F(x, y, z) = c$, $G(x, y, z) = d$. Suponhamos que existe uma curva diferenciável $\gamma(x)$ com $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ cujo imagem está contido na interseção das duas superfícies, com $\gamma(x) = (x, y(x), z(x))$. Em outras palavras, estas funções $y(x), z(x)$ estão definidas implicitamente pelo sistema de equações $F(x, y, z) = c$, $G(x, y, z) = d$.

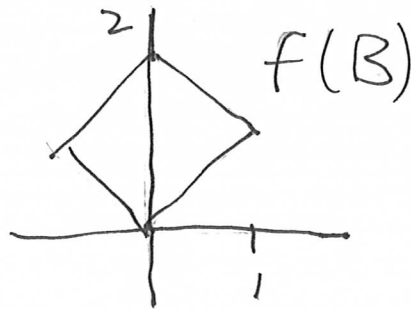
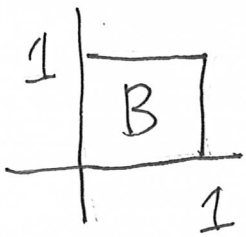
Para quais valores de (x, y, z) sambemos, através do Teorema de Valor Implícito, que uma tal γ de fato existe? Ache o vetor tangente de uma tal curva γ em termos dos coordenados x, y, z do ponto $\gamma(x)$.

(5) Dado a função f com $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$, o conjunto L é a curva de nível 1 da função f . Ache os pontos $\underline{p}_{\max}$ e $\underline{p}_{\min}$ onde função $g(x, y) = xy$ assume os valores máximo e mínimo em L . Quais são esses valores?

① Isto é a mesma função que no #③! ①

$$A \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$\det A = 2$: multiplica a área por 2



②

② Área $f(B) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 = 2 \cdot \text{área}(B)$

$$\text{Área } f(f(f(B))) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = \boxed{8}$$

③ f dado por A^{-1} , a matriz

inversa; $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{2}$

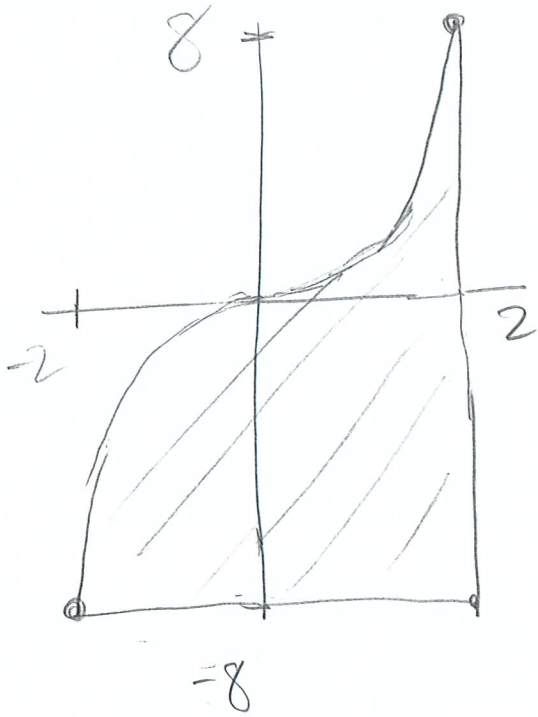
$$\text{área } f^{-1}(B) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(2)

(2)

$$\int_{-2}^2 \left(\int_{-8}^{x^3} f(x,y) dy \right) dx$$



$$= \int_{-8}^8 \left(\int_{y^{1/3}}^2 f(x,y) dx \right) dy$$

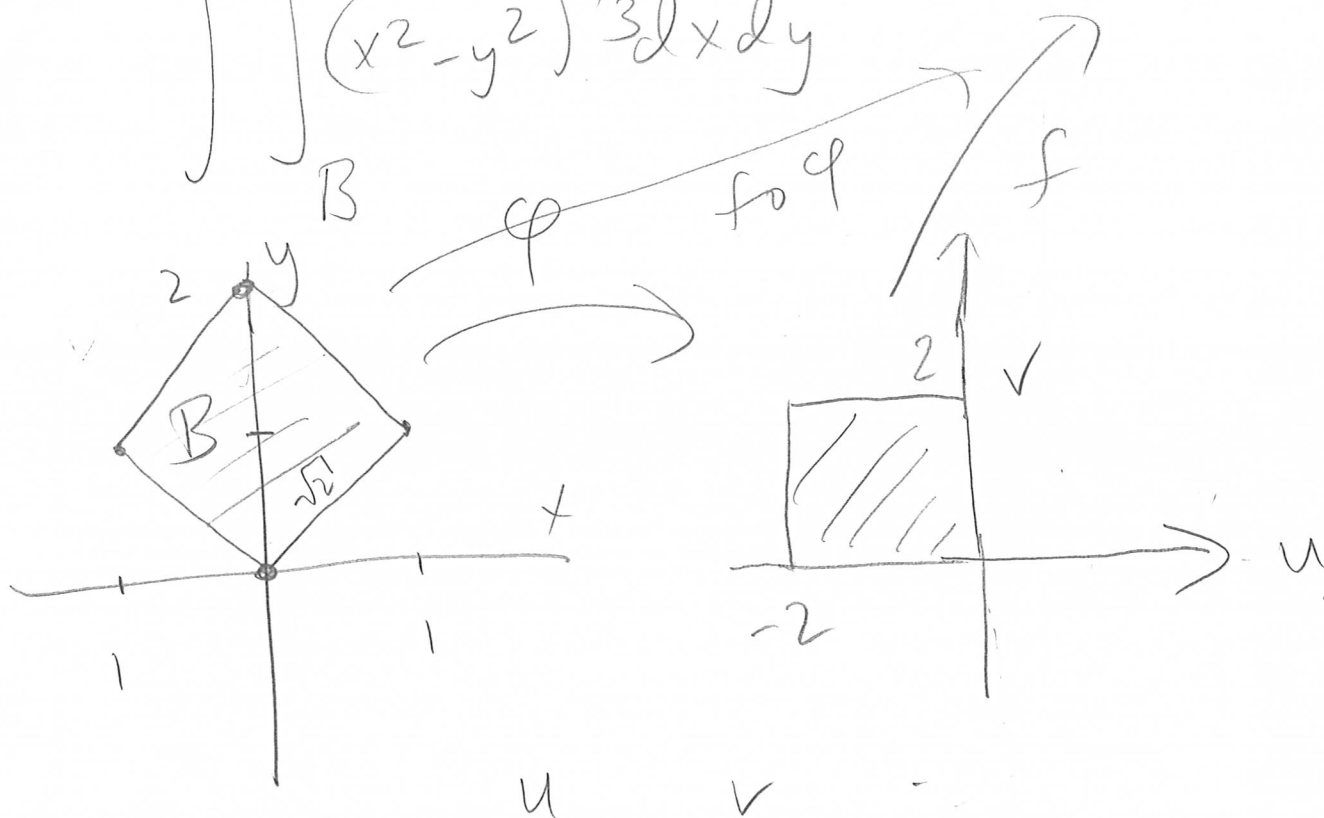
$$y = x^3$$

$$x = y^{1/3}$$

(3)

(3)

$$\iint_B (x^2 - y^2)^{1/3} dx dy$$



$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\phi(1, 1) = (0, 2)$$

$$\phi(-1, 1) = (-2, 0)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$\nwarrow R_{\pi/4}$

$$\det A = 2$$

(4)

$$\varphi(x, y) = (u, v) = (x - y, x + y)$$

$$D\varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = A$$

(Sendo que φ é linear, $D\varphi|_{(x,y)} = \varphi$ em cada ponto (x, y))

$|D\varphi| = 2$ a determinante.

Mudança de Variáveis:

$$\iint_B f \circ \varphi(x, y) |D\varphi(x, y)| dx dy = \iint_A f(u, v) du dv = \varphi(B)$$

$$\iint_B (x^2 - y^2)^{1/3} dx dy = \frac{1}{2} \iint_B f \circ \varphi(x, y) 2 dx dy$$

$$= \frac{1}{2} \iint_A f(u, v) du dv = \frac{1}{2} \int_0^2 \int_{-2}^0 (uv)^{1/3} du dv$$

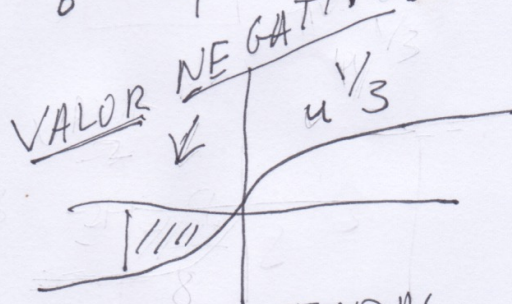
5

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 v^{1/3} \left(\int_{-2}^0 u^{1/3} du \right) dv$$

$$\int_{-2}^0 u^{1/3} du = \frac{3}{4} u^{4/3} \Big|_{-2}^0 = -\frac{3}{4} (2)^{4/3} = -\frac{3}{4} 2^{4/3}$$

$$\int_0^2 v^{1/3} dv = \frac{3}{4} v^{4/3} \Big|_0^2 = \frac{3}{4} 2^{4/3}$$

$2^{4/3} \cdot 2^{4/3}$



$$\int \int = -\frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2^4} \cdot 2^{8/3}$$

$$= -9 \cdot 2^{8/3-5} = \boxed{-9 \cdot 2^{-7/3}} = \boxed{\frac{-9}{8} 2^{2/3}}$$

$$= \boxed{\frac{-9}{32} \cdot 2^{8/3}}$$

ambas corretas.

(6)

$$(4) \quad F(x, y, z) = 2x + y + z = c$$

$$G(x, y, z) = xy - z + 2 = d$$

$$\gamma(x) = (x, y(x), z(x)) \quad F(\gamma(x)) = c$$

$$G(\gamma(x)) = d$$

Definamos $H: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$$H = (H_1, H_2) = (F, G) \quad \text{então:}$$

$$H(\gamma(x)) = (F(\gamma(x)), G(\gamma(x))) = (c, d)$$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{H} \mathbb{R}^2$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{H \circ \gamma}$

Subemos

$$D(H \circ \gamma)(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

⑦

Pela regra da cadeia,

$$D(H \circ \gamma)|_x = DH|_{\gamma(x)} D\gamma|_x$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial H_1}{\partial x} & \frac{\partial H_1}{\partial y} & \frac{\partial H_1}{\partial z} \\ \frac{\partial H_2}{\partial x} & \frac{\partial H_2}{\partial y} & \frac{\partial H_2}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma'_1 \\ \gamma'_2 \\ \gamma'_3 \end{bmatrix} \Big|_{\gamma(x)} = \begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

então $\begin{cases} F_y y' + F_z z' = -F_x \\ G_y y' + G_z z' = -G_x \end{cases}$ ou, $\begin{bmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_x \\ -G_x \end{bmatrix}$

Inversa da matriz: $\frac{\begin{bmatrix} G_z & -F_z \\ -G_y & F_y \end{bmatrix}}{F_y G_z - F_z G_y} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -F_x \\ -G_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a F_x - b G_x \\ -c F_x - d G_x \end{bmatrix}$$

$$y' = \frac{-G_z F_x + F_z G_x}{F_y G_z - F_z G_y}$$

$$z' = \frac{G_y F_x - F_y G_x}{F_y G_z - F_z G_y}$$

- Isto vale se
- Se $F_y b_z - F_z b_y \neq 0$.

(8)

$$\nabla F = (F_x, F_y, F_z) = (2, 1, 1)$$

$$\nabla G = (G_x, G_y, G_z) = (y, x, -1)$$

Então se $F_y b_z - F_z b_y = -1 - x \neq 0$

Para (x, y, z) com $\boxed{x \neq -1}$ Substitua que:

$$y' = \frac{2 + y}{-1 - x}$$

$$z' = \frac{2x - y}{-1 - x}$$

$$\gamma'(x) = (1, y', z') = \left(1, \frac{-2-y}{1+x}, \frac{y-2x}{1+x}\right)$$

Também podemos ir mais cedo para os números: $\nabla F = (2, 1, 1)$ $\nabla G = (y, x, -1)$

Dai $DH_{\gamma(x)} D\gamma|_x$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ y & x & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + y' + z' \\ y + xy' - z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Então

$$\begin{cases} 2 + y' + z' = 0 \\ y' + xy' - z' = 0 \end{cases}$$

sistema

9

equivalente ao sistema

$$\begin{cases} y' + z' = -2 \\ xy' - z' = -y \end{cases}$$

Em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -y \end{bmatrix}$$

inversa da matriz exist $\Leftrightarrow x \neq -1$:

$$\frac{\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -x & 1 \end{bmatrix}}{-1-x} \text{ daí: } \begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix} = \frac{1}{-1-x} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ -y \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-1-x} \begin{bmatrix} 2+y \\ 2x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2-y}{1+x} \\ \frac{y-2x}{1+x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y' \\ z' \end{bmatrix}$$

$$\text{Daí } \gamma'(x) = (1, y', z')$$

$$= \left(1, \frac{-2-y}{1+x}, \frac{y-2x}{1+x} \right)$$

DBS: o vetor $\gamma'(x)$ é perpendicular (10)

ao ∇F e ∇G :

$$\nabla F \cdot \gamma'(x) = (2, 1, 1) \cdot \left(1, \frac{-2-y}{1+x}, \frac{y-2x}{1+x}\right)$$

$$= 2 + \frac{-2-y}{1+x} + \frac{y-2x}{1+x}$$

$$= 2 + \frac{-2-2x}{1+x} = \frac{2+2x-2-2x}{1+x}$$

$$= 0$$

$$\text{e } \nabla G \cdot \gamma'(x) =$$

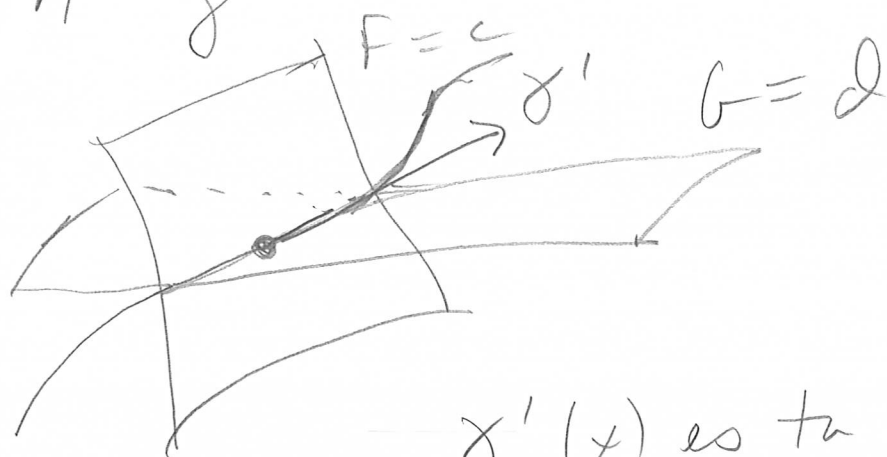
$$(y, x, -1) \cdot \left(1, \frac{-2-y}{1+x}, \frac{y-2x}{1+x}\right)$$

$$= y + \frac{-2x-yx}{1+x} + \frac{2x-y}{1+x}$$

$$= \frac{y + yx - 2x - yx + 2x - y}{1+x} = 0$$

A geometria é a seguinte:

(11)



$\gamma'(x)$ está dentro do plano tangente à superfície $F(x,y,z)=c$ no ponto $\gamma(x)$ então é perpendicular ao ∇F .

OBS: $\nabla F \cdot \nabla G =$

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ y & x & -1 \end{vmatrix} = \underline{i}(-1-x) - \underline{j}(-2-y) + \underline{k}(2x-y)$$

$$= (-1-x, 2+y, 2x-y)$$

$$= (-1-x)(\gamma'(x))!!$$

$$\textcircled{5} \quad f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2, \quad g(x, y) = xy \quad \textcircled{12}$$

$$\nabla f = (f_x, f_y) = \left(\frac{x}{2}, 2y\right)$$

$$\nabla g = (g_x, g_y) = (y, x)$$

$$L = \{(x, y) : f(x, y) = 1\}$$

Multiplicadora de Lagrange: existe (x, y)

tal que $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$

$$\left(\frac{x}{2}, 2y\right) = \lambda (y, x)$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} = \lambda y \\ 2y = \lambda x \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \lambda = \frac{x}{2y} \\ \lambda = \frac{2y}{x} \end{array} \right] \Rightarrow \lambda = \lambda^{-1}$$

$$\lambda^2 = 1$$

$$\boxed{\lambda = \pm 1}$$

$$\frac{x}{2} = \pm y, \quad x = \pm 2y$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ x = \pm 2y \end{array} \right] \quad \frac{4y^2}{4} + y^2 = 1$$

$$2y^2 = 1$$

$$\boxed{y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}} \quad \boxed{x = \pm 2y}$$

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} : \left[\begin{array}{l} x = 2y = \sqrt{2} \\ x = -2y = -\sqrt{2} \end{array} \right]$$

4 pontos

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{2} : \left[\begin{array}{l} x = +2y = -\sqrt{2} \\ x = -2y = \sqrt{2} \end{array} \right]$$

$$g(x, y) = xy = \left[\begin{array}{ll} \left(\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) & 1 \\ \left(-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) & 1 \\ \left(\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) & -1 \\ \left(-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \text{valor} \\ \text{max} \\ \\ \text{min} \end{array}$$

