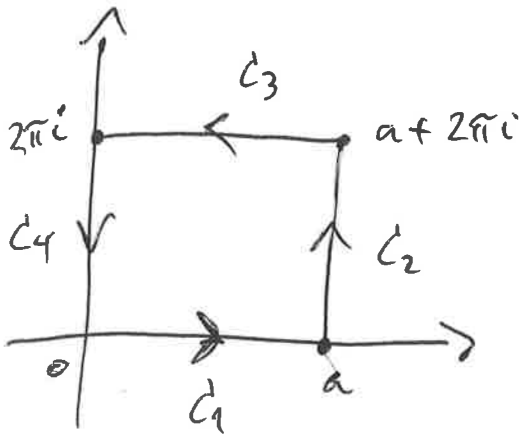
1. Calcular o módulo de $\dfrac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}$. (1 ponto)

$$\frac{|3+4i|\,|-1+2i|}{|-1-i|\,|3-i|} = \frac{\sqrt{25}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{5}{2} \quad //.$$

2. Calcular $\int_C e^z dz$ a partir da definição, onde C é o retângulo de vértices $0, a, a+2\pi i$ e $2\pi i$ ($a \in \mathbb{R}$). (1 ponto)



$$\int_C e^z dz = \int_{C_1} + \dots + \int_{C_4}$$

$$= \cancel{\int_0^a e^t \cdot 1\, dt} + \int_0^{2\pi} e^{a+it}\, i\, dt - \cancel{\int_0^a \underbrace{e^{t+2\pi i}}_{=e^t} \cdot 1\, dt} - \int_0^{2\pi} e^{it} \cdot i\, dt$$

$$= e^a \left[e^{it}\right]_0^{2\pi} - \left[e^{it}\right]_0^{2\pi} = e^a(1-1) - (1-1) = 0 \;//$$

3. Mostre que se $Re(z) > 0$ então $Arg(z) = \dfrac{Log\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)}{2i}$. (1.5 ponto)

$$\frac{z}{|z|} = e^{iArg(z)} \quad \text{onde } Arg(z) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

(pois $Re\, z > 0$)

Elevando ambos os membros ao quadrado:

$$\frac{z^2}{|z|^2} = e^{2iArg(z)} \Rightarrow \frac{z}{\bar{z}} = e^{2iArg(z)}$$

Tomando o logaritmo principal:

$$Log\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = Log\left(e^{2iArg(z)}\right)$$

$$= 2i\,Arg(z)$$

pois $2Arg(z) \in (-\pi, \pi)$ //

4. Mostre que não existe função holomorfa $f = u + iv$ definida num domínio Ω de $\mathbb{C}$ tal que $u(x, y) = x^2 + y^2$. (1.5 ponto)

Se $f = u + iv$ é holomorfa, então

u é harmônica, mas

$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 2 + 2 = 4 \neq 0.$ //

5. Prove que a função

$$f(x+iy) = e^{-2xy}\cos(x^2-y^2) + ie^{-2xy}\operatorname{sen}(x^2-y^2)$$

é inteira. (1.5 ponto)

$$\left.\begin{aligned} u_x &= -2y\,e^{-2xy}\cos(x^2-y^2) - 2x\,e^{-2xy}\operatorname{sen}(x^2-y^2) \\ v_y &= -2x\,e^{-2xy}\operatorname{sen}(x^2-y^2) - 2y\,e^{-2xy}\cos(x^2-y^2) \end{aligned}\right] =$$

$$\left.\begin{aligned} u_y &= -2x\,e^{-2xy}\cos(x^2-y^2) + 2y\,e^{-2xy}\operatorname{sen}(x^2-y^2) \\ v_x &= -2y\,e^{-2xy}\operatorname{sen}(x^2-y^2) + 2x\,e^{-2xy}\cos(x^2-y^2) \end{aligned}\right] \text{opostos}$$

Isto é, valem as eqs. de C-R em $\mathbb{R}^2$.

Como u e v são de classe C^∞ em $\mathbb{R}^2$,

segue que f é inteira em $\mathbb{C}$ //.

6. Determinar todos os pontos em que a função

$$f(x+iy) = y^2 \operatorname{sen} x + iy.$$

é derivável e calcular sua derivada nesses pontos. (2 pontos)

Eqs. de C-R : $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$

Condição necessária para ser derivável num ponto.

$$\left.\begin{cases} y^2 \cos x = 1 & \Rightarrow & y \neq 0 \text{ e } \cos x > 0 \\ 2y \operatorname{sen} x = 0 & \Rightarrow & y = 0 \text{ ou } \operatorname{sen} x = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \operatorname{sen} x = 0, \\ \cos x = 1 \end{array}$$

Assim f só pode ser derivável em $\begin{array}{l} x = 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \\ y = \pm 1 \end{array}$

Como u e v são de classe C^∞ em $\mathbb{R}^2$,

f é derivável exatamente nesses pontos.

Além disso,

$$f'(2k\pi \pm i) = \frac{\partial u}{\partial x}(2k\pi, \pm i) + i \frac{\partial v}{\partial x}(2k\pi, \pm i)$$

$$= 1 + i0 = 1 \ //.$$

7. Prove que $f(z) = \dfrac{1}{z}$ não admite primitiva no domínio $\Omega = \mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. (2 pontos)

$C : |z| = 1$ é uma curva fechada em Ω

e $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0$ (sentido anti-horário),

portanto f não admite primitiva em Ω. //

8. Determinar todos os valores de $z \in \mathbb{C}$ tais que $\operatorname{sen} z = 2$. (2 pontos)

$$\operatorname{sen} z = 2 \Leftrightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 2 \Leftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 4i$$

$$\Leftrightarrow w - w^{-1} = 4i, \quad \text{onde } w = e^{iz}$$

$$\Leftrightarrow w^2 - 4iw - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow w = \frac{4i \pm \sqrt{-16+4}}{2} = (2 \pm \sqrt{3})\, i$$

$$\Leftrightarrow iz = \log (2 \pm \sqrt{3})\, i$$

$$\Leftrightarrow iz = \ln (2 \pm \sqrt{3}) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} \pm i \ln (2 + \sqrt{3}) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \; //.$$