1. Calcular o valor da integral:

$$\int_{\partial B(0,1)} \frac{\text{sen } z}{z^{40}}\, dz$$

(1.0 ponto)

$$\int_{\partial B(0,1)} \frac{\text{sen}\, z}{z^{40}}\, dz = \frac{2\pi i}{39!} \frac{d^{39}}{dz^{39}} \text{sen}\, z \Big|_{z=0}$$ (Fórmula Integral de Cauchy)

$$= \frac{2\pi i}{39!} \frac{d^{3}}{dz^{3}} \text{sen}\, z \Big|_{z=0}$$

$$= \frac{2\pi i}{39!} (-\cos 0)$$

$$= -\frac{2\pi i}{39!}$$

2. Seja C um círculo percorrido uma vez no sentido anti-horário que não passa pelos pontos 0,1. Determinar os possíveis valores de $\int_C \frac{dz}{z(z-1)}$ em função da posição de C.

   (**Sugestão:** Usar frações parciais.) **(1.5 ponto)**

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}$$

$$\int_C \frac{dz}{z-1} = \begin{cases} 2\pi i, & \text{se } \overset{1}{\cancel{0}} \in \text{int}(C) \quad (\text{Fórm. Int. Cauchy}) \\ 0, & \text{caso contrário} \quad (\text{Teor. Int. Cauchy}) \end{cases}$$

$$\int_C \frac{dz}{z} = \begin{cases} 2\pi i, & \text{se } 0 \in \text{int}(C) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Logo:

$$\int_C \frac{dz}{z(z-1)} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0, 1 \in \text{int}(C) \\ 2\pi i & \text{se } 1 \in \text{int}(C),\ 0 \notin \text{int}(C) \\ -2\pi i & \text{se } 0 \in \text{int}(C),\ 1 \notin \text{int}(C) \\ 0 & \text{se } 0, 1 \notin \text{int}(C) \end{cases}$$

3. Representar a função $f(z) = \dfrac{7z}{1-4z^3}$ por uma série de potências de z. Qual é o raio de convergência? **(1.5 ponto)**

$$7z \cdot \frac{1}{1-4z^3} = 7z \sum_{n=0}^{\infty} (4z^3)^n \qquad |4z^3| < 1$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 7 \cdot 4^n z^{3n+1} \qquad |z| < 1/\sqrt[3]{4}$$

4. Determinar o raio de convergência das seguintes séries de potências:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$ **(1.0 ponto)**

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^{2n}$ **(1.0 ponto)**

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n$ **(1.0 ponto)**

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^{n^2}$ **(1.0 ponto)**

(a) $$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}$$

$$= \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{1+1/n}{2(2+1/n)} \longrightarrow \frac{1}{4} \quad \therefore \quad R = \frac{1}{4}$$

(b) Fazendo $w = z^2$ recaímos na série de (a), com disco de convergência $|w| < \frac{1}{4}$. Logo o disco de convergência da série em z é $|z| < \frac{1}{2}$

$\therefore \; R = \frac{1}{2}$

(c) $$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \longrightarrow \frac{1}{2} \quad \therefore \quad R = \frac{1}{2}.$$

(d) $$a_n = \begin{cases} 2^{\sqrt{n}}, & \text{se } n \text{ é um quadrado perfeito} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$R = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} (2^{\sqrt{n}})^{1/n} = \lim_{n\to\infty} 2^{1/\sqrt{n}} = 1.$$

5. (a) Representar a função $\dfrac{\operatorname{sen}(z^2)}{z^2}$ por uma série de potências de z no domínio $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

(1.0 ponto)

(b) Mostrar que a função $f(z) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(z^2)}{z^2} & \text{se } z \neq 0 \\ 1 & \text{se } z = 0 \end{cases}$, é inteira usando o item (a).

(1.0 ponto)

(a) $$\operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad z \in \mathbb{C}$$

$$\frac{\operatorname{sen}(z^2)}{z^2} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{4n}}{(2n+1)!} \qquad z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$$

(b) $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{4n}}{(2n+1)!} \qquad z \in \mathbb{C}$$

$\Rightarrow f$ analítica em $\mathbb{C}$ $\Rightarrow f$ inteira.

6. Seja f uma função inteira arbitrária. Mostrar que se $\Re f > 0$ em todos os pontos então f é constante. (**Sugestão:** Considere e^{-f}.)

O que acontece se $\Re f < 0$ em todos os pontos? **(2.0 pontos)**

e^{-f} é composta de inteiras $\therefore$ inteira

$|e^{-f}| = |e^{-\mathrm{Re} f}||e^{-i \mathrm{Im} f}| = e^{-\mathrm{Re} f} < 1 \quad \because \mathrm{Re} f > 0$

$\Rightarrow e^{-f}$ é limitada

Pelo T. de Liouville, e^{-f} é constante

$\therefore f$ é constante

Se $\mathrm{Re} f < 0$ então $\mathrm{Re}(-f) > 0$ com $-f$ inteira

$\Rightarrow -f$ constante (1.ª parte)

$\therefore f$ é constante.