1. Localizar os pólos das funções indicadas e calcular os resíduos:

(a) $\dfrac{1}{z^2+5z+6}$; **(1 ponto)**

(b) $\dfrac{1}{(z-1)^2}$; **(1 ponto)**

(c) $\dfrac{1}{\sin z}$. **(1 ponto)**

(a) $\dfrac{1}{z^2+5z+6} = \dfrac{1}{z+2} + \dfrac{-1}{z+3}$ Pólos : $-2, -3$ (simples)

Das séries de Laurent, $Res_{-2} = 1$, $Res_{-3} = -1$.

(b) Já está na forma de série de Laurent em 1.
Pólo duplo em 1, $Res_1 = 0$. (termo a_{-1}).

(c) $\sin z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{z \to k\pi} \frac{z-k\pi}{\sin z} = \lim_{w\to 0} \frac{w}{\sin(w+k\pi)} = \lim_{w \to 0} \frac{w}{\sin w \cos k\pi} = (-1)^k$$

Pólos simples em $z = k\pi$, $Res_{k\pi} = (-1)^k$.

2. (a) Provar ou desprovar: existe uma função com um pólo simples no ponto 2 e resíduo 0. **(1 ponto)**

   (b) Construir uma função cujos únicos pontos singulares sejam um pólo duplo em 2 com resíduo 0 e um pólo simples em 1 com resíduo 2. **(1 ponto)**

(a) Não existe. Se f tem um pólo simples em 2, então a série de Laurent

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-2)^n \text{ para } 0 < |z-2| < R$$

$R \in (0, +\infty]$

com $a_{-1} \neq 0$. Mas $Res_2(f) = a_{-1}$.

(b) $f(z) = \frac{1}{(z-2)^2} + \frac{2}{z-1}$ tem pólo duplo em 2 e simples em 1. Além disso,

$$Res_2(f) = \underbrace{Res_2\left(\frac{1}{(z-2)^2}\right)}_{=0 \text{ pois } a_{-1}=0} + \underbrace{Res_2\left(\frac{2}{z-1}\right)}_{=0 \text{ pois função é holomorfa em } 2} = 0$$

$$Res_1(f) = \underbrace{Res_1\left(\frac{1}{(z-2)^2}\right)}_{=0 \text{ pois é holomorfa em } 1} + \underbrace{Res_1\left(\frac{2}{z-1}\right)}_{=2 \text{ pois } a_{-1}=2} = 2$$

3. Seja $n \in \mathbb{Z}$. Calcular $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z|=1} z^n e^{2/z}\, dz$. **(2 pontos)**

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \quad (z \in \mathbb{C}) \Rightarrow e^{2/z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} \frac{1}{z^k}$$

$$\Rightarrow z^n e^{2/z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} z^{n-k} \qquad n-k=-1 \Leftrightarrow k=n+1 \quad (k \geq 0)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} z^n e^{2/z}\, dz = \operatorname{Res}_0\left(z^n e^{2/z}\right) = a_{-1}$$

$$= \begin{cases} 2^{n+1}/(n+1)! & \text{se } n \geq -1, \\ 0 & \text{se } n < -1. \end{cases}$$

4. Seja $a > 0$. Calcular a integral imprópria real $\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^3}$ por meio de resíduos.

(3 pontos)

$f(x) = P(x)/Q(x)$ quociente de polinômios

$\deg Q \geq \deg P + 2$, Q sem raízes reais.

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+a^2)^3}$$ pontos singulares no semi-plano $y>0$: $z = ia$ (pólo triplo)

$$\operatorname{Res}_{ia} f = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dz^2} \frac{z^2}{(z+ia)^3}\bigg|_{z=ia} = \frac{1}{2}\left(\frac{-i}{8a^3}\right) = \frac{-i}{16a^3}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^3} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} = \pi i \operatorname{Res}_{ia} f = \frac{\pi}{16a^3}$$

Cálculo das derivadas:

$$\frac{d}{dz}\frac{z^2}{(z+ia)^3} = \frac{2z(z+ia)^3 - z^2 3(z+ia)^2}{(z+ia)^6} = \frac{2zia - z^2}{(z+ia)^4}$$

$$\frac{d^2}{dz^2} = \frac{(2ia - 2z)(z+ia)^4 - 4(z+ia)^3(2zia - z^2)}{(z+ia)^8}$$

Em $z = ia$: $$\frac{-4(2ia)^3(ia)^2}{(2ia)^8} = \frac{-32}{8\cdot 32(ia)^3} = -\frac{1}{8}\cdot\frac{i}{a^3}$$

5. Sejam $z_0 \in \mathbb{C}$ e $R > 0$ com $|z_0| \neq R$.

(a) Suponha que $z \in \mathbb{C}$ satisfaz $|z - z_0| = R$. Mostrar que **(1 ponto)**

$$\left|\frac{1}{z} - \frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2 - R^2}\right| = \frac{R}{||z_0|^2 - R^2|}.$$

(b) Deduzir de (a) que $f(z) = \frac{1}{z}$ aplica o círculo de centro z_0 e raio R sobre o círculo de centro $\frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2 - R^2}$ e raio $\frac{R}{||z_0|^2 - R^2|}$. **(1 ponto)**

(a) $$\left|\frac{1}{z} - \frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2 - R^2}\right| = \frac{||z_0|^2 - R^2 - \bar{z}_0 z|}{|z(|z_0|^2 - R^2)|} = \frac{|\bar{z}_0 z_0 - |z-z_0|^2 - \bar{z}_0 z|}{|z|\,||z_0|^2 - R^2|}$$

(usando a hipótese $R^2 = |z - z_0|^2$)

$$= \frac{|\bar{z}_0(z_0 - z) - (\bar{z}_0 - \bar{z})(z_0 - z)|}{|z|\,||z_0|^2 - R^2|} = \frac{|z_0 - z|\cancel{|\bar{z}|}}{\cancel{|z|}\,||z_0|^2 - R^2|} = \frac{R}{||z_0|^2 - R^2|}$$

(b) A equação do círculo $C(z_0, R)$ é $|z - z_0| = R$.

(a) diz que $f(C(z_0, R)) \subset C(w_0, S)^{(*)}$ onde

$$w_0 = \frac{\bar{z}_0}{|z_0|^2 - R^2}, \quad S = \frac{R}{||z_0|^2 - R^2|}.$$ Trocando z_0 por w_0 e R por S, $$f(C(w_0, S)) \subset C\left(\frac{\bar{w}_0}{|w_0|^2 - S^2}, \frac{S}{||w_0|^2 - S^2|}\right).$$

Mas $$\frac{\bar{w}_0}{|w_0|^2 - S^2} = \frac{z_0}{|z_0|^2 - R^2} \Bigg/ \left[\frac{|z_0|^2}{(|z_0|^2 - R^2)^2} - \frac{R^2}{(|z_0|^2 - R^2)^2}\right] = z_0$$ e

$$\frac{S}{||w_0|^2 - S^2|} = R \Rightarrow f(C(w_0, S)) \subset C(z_0, R)$$

$$\Rightarrow C(w_0, S) \subset f^{-1}C(z_0, R) = f(C(z_0, R))^{(**)}$$ (pois $f^{-1} = f$)

De $(*)$ e $(**)$ $f(C(z_0, R)) = C(w_0, S)$ //