Entrega 14/Nov/2019

MAP0214
Prof. Arnaldo Gammal

4o. PROGRAMA - Equações Diferenciais Ordinárias

I- Resolver usando Euler e Runge-Kutta Clássico (4a. ordem-RK4) a equação diferencial ordinária de 2a. ordem $\ddot{y} = \dot{y} - y + t^3 - 3t^2 + 6t$ para $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 0$ para $y(0) = 0$ e $\dot{y}(0) = 0$. Esta equação pode pode ser escrita em termos de duas equações de 1a. ordem na forma $\dot{y} = z$ e $\dot{z} = g(t, y, z)$ onde $g(t, y, z) = z - y + t^3 - 3t^2 + 6t$. Calcular $y(6)$ e $dy/dt(t = 6)$ usando passo $h(= 0.01)$ e comparar os resultados com o exato. Obs. solução analítica $y = t^3$. Dupla precisão! Experimente rodar em precisão simples! Para RK4 use uma rotina **seguindo a sequência**:

subrotina $rk4(t_i, y_i, z_i, h)$
$k_{1y} = h \times z_i$
$k_{1z} = h \times g(t_i, y_i, z_i)$
$k_{2y} = h \times (z_i + k_{1z}/2)$
$k_{2z} = h \times g(t_i + h/2, y_i + k_{1y}/2, z_i + k_{1z}/2)$
$k_{3y} = h \times (z_i + k_{2z}/2)$
$k_{3z} = h \times g(t_i + h/2, y_i + k_{2y}/2, z_i + k_{2z}/2)$
$k_{4y} = h \times (z_i + k_{3z})$
$k_{4z} = h \times g(t_i + h, y_i + k_{3y}, z_i + k_{3z})$
$y_i = y_i + (k_{1y} + 2k_{2y} + 2k_{3y} + k_{4y})/6$
$z_i = z_i + (k_{1z} + 2k_{2z} + 2k_{3z} + k_{4z})/6$
$t_i = t_i + h$
fim

II-EQUAÇÃO DE DUFFING, "DOUBLE WELL POTENTIAL" (POTENCIAL POÇO DUPLO)

1)ESPAÇO DE FASE

a) Substitua a eq. anterior do item I) pela do potencial poço duplo $\ddot{x} - \frac{1}{2}x(1 - x^2) = 0$ com $x(0) = -1$ para os casos $\dot{x}(0) = 0.1$, 0.5, 1.0. Construa os digramas de espaço de fase $\dot{x}(t) \times x(t)$. Basta evoluir $rk4(t_i, x_i, v_i, h)$, $v = \dot{x}$ (velocidade).

b) Inclua amortecimento com $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} - \frac{1}{2}x(1 - x^2) = 0$ e com $x(0) = -1$, $\dot{x}(0) = 1$ e $2\gamma = 0.25$, 0.8. Construa os gráficos de espaço de fase.

c) Force o sistema com $\ddot{x} + 0.25\dot{x} - 0.5x(1 - x^2) = F \cos \omega t$ [1]. Usando $x(0) = -1$, $\dot{x}(0) = 1$ e $\omega = 1$, vá aumentado a intensidade da força F com valores 0.22, 0.23, 0.28, 0.35. Force bastante o sistema com $F = 0.6$. Em todo este item remova o transiente (=transitório) para construir os diagramas de espaço de fase.

d) Quem são os atratores em cada um desses casos nos itens a,b,c?

2) DIAGRAMA DE BIFURCAÇÃO

Uma secção de Poincaré corresponde neste caso a uma "fotografia estroboscópica" do Espaço de Fase a cada período do elemento forçador [2]. Pode ser imaginada como cortes periódicos no atrator tridimensional desenhado com $\dot{x}(t) \times x(t) \times t$.

Construa outro programa com eq. e MESMAS condições iniciais 1)c). Para um dado F faça secções de Poincaré e determine o valor dos pontos x nas secções. Varie o F de 0 até 0.7 e plote x (em $\omega t = 2\pi n + cte$) em função de F, SEM LIGAR os pontos. Escolha por simplicidade $cte = 0$. Estime o valor da **constante de Feigenbaum** δ a partir do diagrama de bifurcação.

Sugestão: escolhemos h como uma fração do período como por exemplo $h = 0.001 * 2\pi/\omega$ e após 1000 passos teremos andado um período.

Sugestão de Programa:

Repetir de $F = 0$ até $F = 0.7$ passo $\Delta F = 0.0005$
    colocar condições iniciais
    $h = 0.01 * 2\pi/\omega$
    Evoluir o transiente com 200000 passos
        call $rk4(t_i, x_i, v_i, h)$
    fim do transiente
    $h = 0.001 * 2\pi/\omega$
    Fazer de $i = 1$ até 100 ! evolução de 100 períodos
        Fazer de $j = 1$ até 1000 ! evolui um período
            call $rk4(t_i, x_i, v_i, h)$
        fim do loop em j
        imprime F, x_i ! imprime a cada período $2\pi/\omega$
    fim do loop em i
fim do loop de F

3) MAPA DE POINCARÉ

No programa 2) remova o loop de F. Fixe $F = 0.28$ e faça i ir até 20000. No comando "imprime", imprima também $v_i (\equiv \dot{x}(t))$. Coloque os pontos (x_i, v_i) num gráfico $\dot{x}(t) \times x(t)$. NÃO LIGUE os pontos.

ATENÇÃO ao que dever ser entregue: Programa item I), os valores de $y(t = 6)$ e $dy/dt(t = 6)$ por Euler e por RK Clássico, os gráficos sugeridos em II-1a,b,c; a resposta à pergunta II-1d, a estimativa para a constante de Feigenbaum δ e todos os gráficos sugeridos em 2) e 3). Programas de itens II-1c) e II-2).

Referências

[1] Mitchell J. Feigenbaum, Universal behavior in nonlinear systems, Physica D **7**, 16-39 (1983).

[2] F.C.Moon, *Chaotic and Fractal Dynamics, An Introduction for Applied Scientists and Engineers,* John Wiley & Sons, 1992.

[3] G.L.Baker and J.P.Gollub, *Chaotic Dynamics, an introduction*, Cambridge University Press, 1990, p.44.

[4] H.G. Schuster, *Deterministic Chaos Dynamics, an introduction*, VCH, Weinheim, 2nd. ed., 1989.

[5] P. Cvitanović, *Universality in Chaos*, Institute of Physics Publishing, London, 1989, p.10.