MAT2351 - CÁLCULO I - VÁRIAS VARIÁVEIS

LICENCIATURA - NOTURNO

1O SEM 2019 - PROFA. DANIELA M. VIEIRA

PRIMEIRA PROVA - 03/04/2019

EM TODAS AS QUESTÕES, JUSTIFIQUE SUA RESPOSTA!

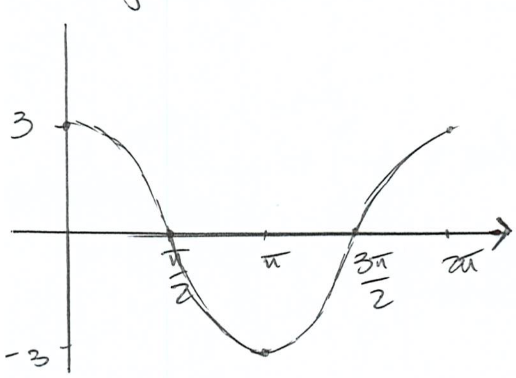
NOME: Gabarito - Leonardo NO. USP: IME

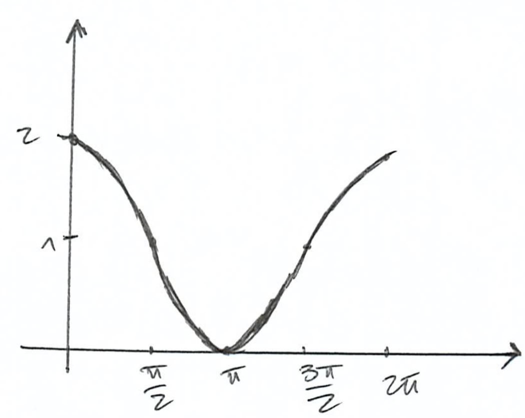
Questão 1 (2,5)

(a) (1,5) Esboce, no mesmo plano, as curvas polares $r_1 = 3\cos\theta$ e $r_2 = 1 + \cos\theta$, para $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

(b) (1,0) Determine a área da região que está dentro da curva r_1 e fora da curva r_2.

a) I-) Inicialmente, vejamos o gráfico cartesiano de cada uma das funções consideradas:



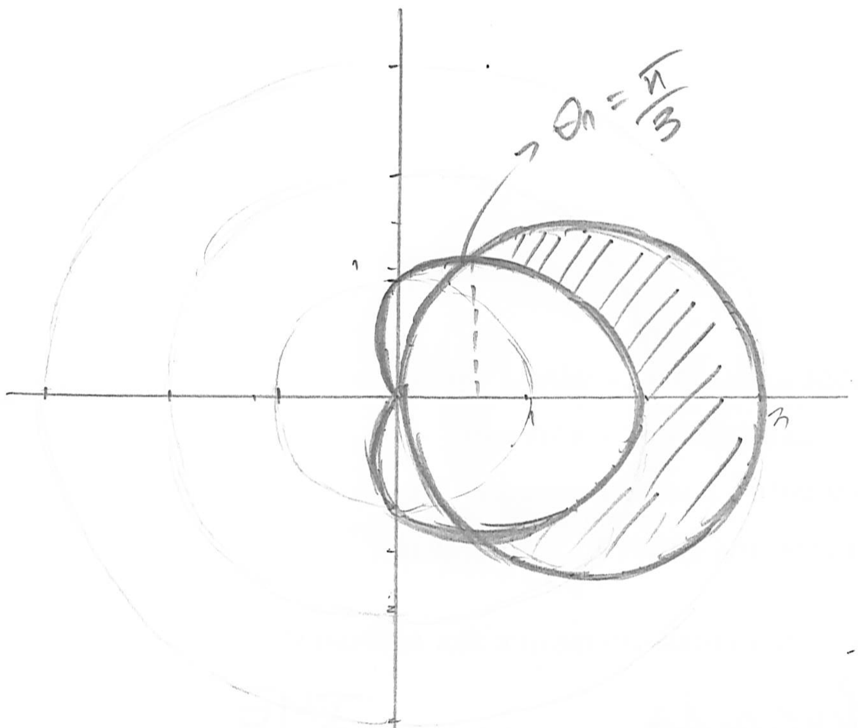


II-) Analisemos a variação de cada uma das funções em coordenadas polares.

θ_1	r_1
$0 \to \pi/2$	$3 \searrow 0$
$\pi/2 \to 2\pi$	$0 \nearrow 3$
$2\pi \to \frac{3\pi}{2}$	$3 \searrow 0$
$\frac{3\pi}{2} \to 2\pi$	$0 \nearrow 3$

θ_2	r_2
$0 \to \pi/2$	$2 \searrow 1$
$\pi/2 \to \pi$	$1 \searrow 0$
$\pi \to 3\pi/2$	$0 \nearrow 1$
$\frac{3\pi}{2} \to 2\pi$	$1 \nearrow 2$

Esboço das curvas:



Área dentro de r_1 (círculo) e fora de r_2 (cardióide).

$r_1 = r_2 \iff$

$3\cos\theta = 1+\cos\theta$

$\iff \cos\theta = \frac{1}{2}$

$\therefore \theta_1 = \frac{\pi}{3}, \ \theta_2 = \frac{5\pi}{3}.$

b) I-) Área cardióide:

$$A_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} (3\cos\theta)^2 d\theta = \frac{9}{2}\int_0^{\pi/3} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{9}{4}\left[\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta\right]_0^{\pi/3} = \frac{9}{4}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \boxed{\frac{3\pi}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{16}}$$

II-) Área círculo:

$$A_2 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} (1+\cos\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} (1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} 1 d\theta + \int_0^{\pi/3} \cos\theta\, d\theta$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} \cos^2\theta\, d\theta = \frac{\pi}{6} + \left[\operatorname{sen}\theta\right]_0^{\pi/3} + \frac{1}{4}\left[\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta\right]_0^{\pi/3} =$$

$$= \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{3\pi}{12} + \frac{9\sqrt{3}}{16} =$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{4} + \frac{9\sqrt{3}}{16}}$$

III-) $A' = \frac{\pi}{4} + \cancel{\frac{9\sqrt{3}}{16}} - \frac{3\pi}{4} - \cancel{\frac{9\sqrt{3}}{16}} = -\frac{\pi}{2} \ \therefore \ \boxed{A' = \frac{\pi}{2}}$

IV-) $A_{\text{região}} = 2 \cdot A'$

$\therefore \boxed{A_{\text{região}} = \pi}$ //

Questão 2 (3,0) Esboce as trajetórias das seguintes curvas parametrizadas.

(a) (1,0) $\alpha(t) = (e^{-t}, 1 + e^{2t})$, $t \geq 0$.

(b) (1,0) $\gamma(t) = (2 - \cos t, \sin^2 t + 3)$, $t \in [0, 2\pi]$.

(c) (1,0) $\beta(t) = (\tan t + \sec t, \tan t - \sec t)$, $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

a) $x = e^{-t}$ (Aplicando $\underline{\ln}$)

I-) $\ln x = \ln(e^{-t})$

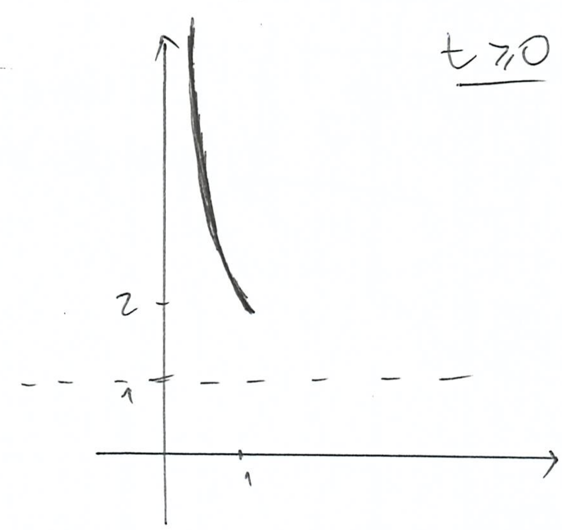
$\ln x = -t \iff t = -\ln x = \ln(x^{-1}) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$

II-) $y = 1 + e^{2\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = 1 + e^{\ln\left(\left(\frac{1}{x}\right)^2\right)} \iff$

$\underline{t \geq 0}$

$$\boxed{y = 1 + \frac{1}{x^2}}$$

$t \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x(t) \leq 1 & (e\ x > 0) \\ y(t) \geq 2 & (e\ y > 0) \end{cases}$



b) $y = \text{sen}^2 t + 3 = (1 - \cos^2 t) + 3 = 4 - \cos^2 t = 2^2 - \cos^2 t =$

$= \underbrace{(2 + \cos t)}_{(-x+4)} \underbrace{(2 - \cos t)}_{x}$

$x = 2 - \cos t$

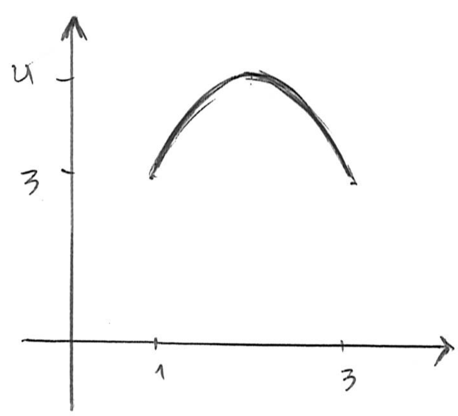
$-x = -2 + \cos t$

$(-x + 4) = 2 + \cos t$

$= (-x + 4) . x = 4x - x^2$

$\therefore \boxed{y = 4x - x^2}$

É uma parábola!!



c) Lembremos a relação fundamental da Trigonometria:

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1 \quad (\div \cos^2 t)$

$tg^2 t + 1 = \sec^2 t$

$tg^2 t - \sec^2 t = -1$

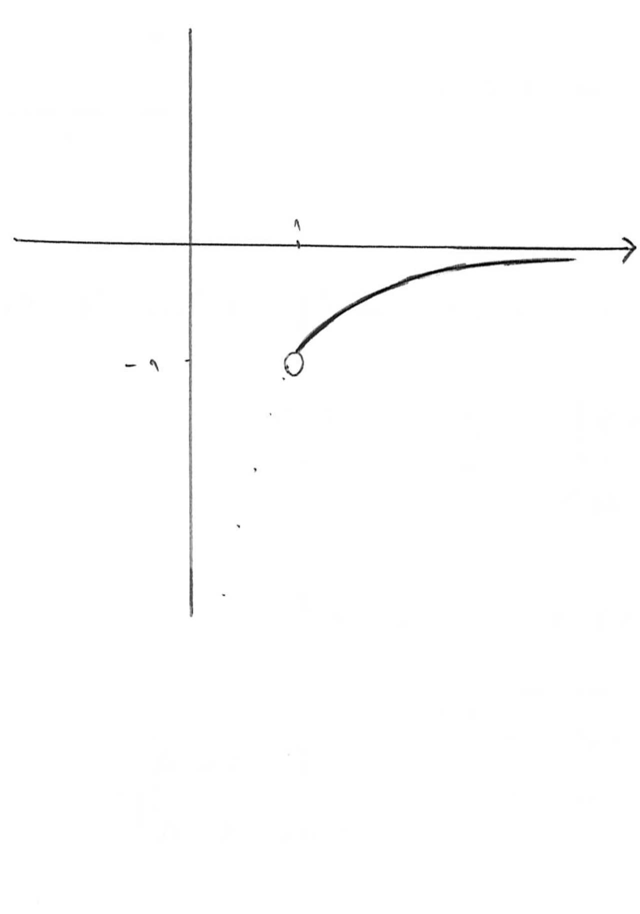
$\underbrace{(tg\,t + \sec t)}_{x} \cdot \underbrace{(tg\,t - \sec t)}_{y} = -1$

$x \cdot y = -1$

$\therefore \boxed{y = -\dfrac{1}{x}}$ é uma hipérbole!

$t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

$\Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ y \to \infty \end{cases}$



Questão 3 (2,5) Considere a curva $C(t) = (t^2, t^3 - t)$, $t \in \mathbb{R}$.

(a) (1,5) Em que ponto a curva intercepta ela mesma? (i) Encontre as equações de ambas as retas tangentes neste ponto. (ii)

(b) (1,0) Em que pontos da curva a reta tangente é paralela à reta com equações $x = 1 + t$ e $y = 4t$? Encontre as equações destas retas tangentes.

a) (i) Esbocemos o gráfico de $C(t)$. Para isto:

I-) Tangente vertical:

$x'(t) = 0 \Rightarrow 2t = 0 \therefore \boxed{t_1 = 0}$

II-) Tangente horizontal:

$y'(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 1 = 0 \Rightarrow 3t^2 = 1 \Rightarrow t^2 = 1/3$

$\therefore t_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}$ e $\boxed{t_3 = -\frac{\sqrt{3}}{3}}$

III-) Crescimento e Decrescimento da curva:

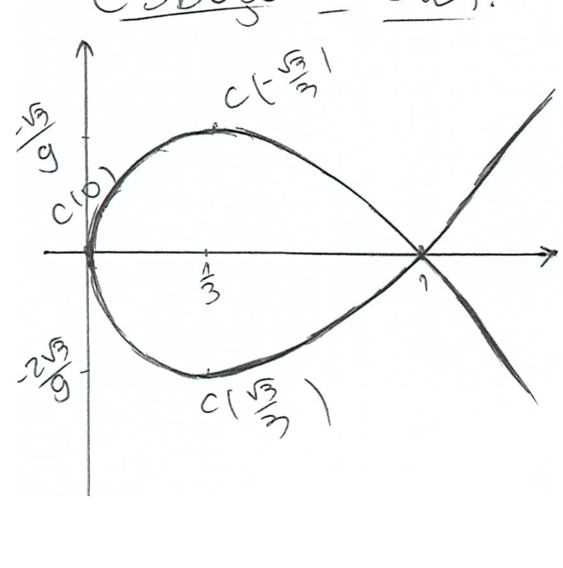
	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		0		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		
$-$		$-$		$+$		$+$	$x'(t) = 2t$
$+$		$-$		$-$		$+$	$y'(t) = 3t^2 - 1$
←		←		→		→	$x(t)$
↑		↓		↓		↑	$y(t)$
↖		↙		↘		↗	$C(t)$

$C(0) = (0,0)$,

$C\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$,

$C\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$

Esboço de $C(t)$:



3 IV-) Devido ao fato de ser simétrica, a curva irá se interceptar quando $y(t) = 0$.

Ou seja: $t^3 - t = 0 \Rightarrow t(t^2 - 1) = 0$

$t = 0$ ou $t = \pm 1$.

$C(1) = (1,0)$, $C(-1) = (1,0)$

Logo, a curva irá se interceptar no ponto $(1,0)$.

III) Tangentes em (1,0).

O coeficiente angular de cada uma das retas será dado por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \boxed{\frac{3t^2-1}{2t} = c'(t)}$$

I-) Reta 1 (t=1):

$$y_1 - 0 = c'(1)(x-1)$$

$$y_1 = 1(x-1)$$

$$\boxed{y_1 = x-1}$$

II-) Reta 2 (t=-1)

$$y_2 - 0 = c'(-1)(x-1)$$

$$y_2 = -1(x-1)$$

$$\boxed{y_2 = -x+1}$$

3-) b) $c(t) = (t^2, t^3 - t)$, $t \in \mathbb{R}$

$r(t) = (4t, 1+t)$, $t \in \mathbb{R}$

I-) A reta $r(t)$ pode ser escrita da forma:

$r(t) = (0,1) + (4,1)t$, $t \in \mathbb{R}$, ou seja, possui $(4,1)$ como vetor diretor.

II-) Desta forma, se a tangente à curva deve ser paralela à reta, então seus vetores diretores devem ser proporcionais. Assim:

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda \cdot 4 \\ y'(t) = \lambda \cdot 1 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} 2t = 4\lambda \Rightarrow t = 2\lambda \\ 3t^2 - 1 = \lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3(2\lambda)^2 - 1 = \lambda$$

$$12\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 + 48$$

$$\Delta = 49$$

$$\lambda = \frac{1 \pm 7}{24} \to \lambda_I = 8/24 = \frac{1}{3}, \quad \lambda_{II} = \frac{-6}{24} = -\frac{1}{4}$$

Portanto, os dois parâmetros nos quais ocorre a tangência são:

$\boxed{t_1 = \frac{2}{3}}$ e $\boxed{t_2 = \frac{-1}{2}}$

Logo, os pontos de tangência são:

$$P_1 = c(t_1) = c\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{4}{9}, \frac{8}{27} - \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{4}{9}, \frac{8-18}{27}\right) = \left(\frac{4}{9}, \frac{-10}{27}\right)$$

$$P_2 = c(t_2) = c\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

III-) Equações das retas tangentes:

$$\cancel{C_1(t) = \left(\frac{4}{9}, -\frac{10}{27}\right)} \qquad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

$$C'(t) = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \boxed{\frac{3t^2-1}{2t}}$$

Primeira tangente

$$C'(2/3) = \frac{\cancel{3}\cdot\frac{4}{\cancel{9}_3} - 1}{2\cdot\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{\cancel{3}}}{\frac{4}{\cancel{3}}} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \quad y_1 + \frac{10}{27} = \frac{1}{4}\left(x - \frac{4}{9}\right)$$

$$y_1 = \frac{1}{4}x - \frac{1}{9} - \frac{10}{27}$$

$$\boxed{y_1 = \frac{1}{4}x - \frac{13}{27}}$$

Segunda Tangente

$$C'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3\cdot\frac{1}{4} - 1}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-\frac{1}{4}}{-1} = \frac{1}{4}$$

$$y_2 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{4}\right)$$

$$y_2 = \frac{1}{4}x - \frac{1}{16} + \frac{12}{16}$$

$$\boxed{y_2 = \frac{1}{4}x + \frac{11}{16}}$$

3-) b) Outra maneira de se pensar é fazendo a desparametrização de $r(t)$:

$x = 4t \qquad y = 1 + t$

$t = \frac{x}{4} \qquad y = 1 + \frac{x}{4}$, logo a reta tem coef. angular $m = \frac{1}{4}$.

I-) Sabe-se que duas retas são paralelas quando possuem o mesmo coeficiente angular. Considerando, portanto a inclinação da curva dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3t^2-1}{2t} = c'(t)$$

Tangente // $r(t)$ <=> $c'(t) = \frac{1}{4}$, logo:

$$\frac{3t^2-1}{\cancel{2}t} = \frac{1}{\cancel{4}_2} \Rightarrow 6t^2 - 2 = t$$

$6t^2 - t - 2 = 0$

$\Delta = 1 + 48$

$\Delta = 49$

$$t = \frac{1 \pm 7}{12} \begin{cases} t_1 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \\ t_{II} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

II-) Desta forma, os pontos de tangência são dados por:

$P_1 = C(t_1) = C(2/3) = \left(\frac{4}{9}, \frac{-10}{27}\right)$

$P_2 = C(t_{II}) = C(-1/2) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

III-) Equações das Tangentes

$y_1 + \frac{10}{27} = \frac{1}{4}\left(x - \frac{4}{9}\right) \qquad y_2 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{4}\right)$

$\therefore \boxed{y_1 = \frac{1}{4}x - \frac{13}{27}} \qquad \boxed{y_2 = \frac{1}{4}x + \frac{11}{16}}$

3-) b) $r(t) = (2t, -1+t)$

$c(t) = (t^2, t^3 - 2t)$

Desparametrizando $r(t)$:

$x = 2t \Rightarrow t = \frac{x}{2}$ $\qquad y = -1 + t = \frac{x}{2} - 1$

I-) Duas retas são paralelas quando possuem o mesmo coeficiente angular. Considerando, portanto, a inclinação da curva dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3t^2-2}{2t} = c'(t)$$

Tangente $// r(t) \iff c'(t) = 1/2$

$$\therefore \frac{3t^2-2}{\cancel{2}t} = \frac{1}{\cancel{2}} \Rightarrow 3t^2 - 2 = t$$

$3t^2 - t - 2 = 0$ $\qquad t = \frac{1 \pm 5}{6} \left\langle \begin{array}{l} t_1 = \frac{6}{6} = 1 \\ t_{II} = \frac{-4}{6} = \frac{-2}{3} \end{array} \right.$

$\Delta = 1 + 24$

$\Delta = 25$ $\qquad$ Assim, os pontos de tangência são dados por:

$P_1 = C(t_1) = C(1) = (1, -1)$

$P_2 = C(t_2) = C\left(-\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{4}{9}, \frac{-8}{27} + \frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{9}, \frac{-8+36}{27}\right) = \left(\frac{4}{9}, \frac{28}{27}\right)$

II-) Equações das Tangentes

$y_1 + 1 = \frac{1}{2}(x-1)$ $\qquad y_2 - \frac{28}{27} = \frac{1}{\cancel{2}}\left(x - \frac{\cancel{4}^{2}}{9}\right)$

$\boxed{y_1 = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}}$ //

$y_2 = \frac{x}{2} - \frac{2}{9} + \frac{28}{27}$

$\boxed{y_2 = \frac{1}{2}x + \frac{22}{27}}$ //

3-) b) $C(t) = (t^2, t^3 - t),\ t \in \mathbb{R}$

$r(t) = (1+t, 4t),\ t \in \mathbb{R}$.

I-) A reta $r(t)$ pode ser desparametrizada da forma:

$x = 1+t \qquad y = 4t$

$t = x-1 \qquad y = 4x - 4$, logo seu coeficiente angular é $m=4$.

II-) Sabe-se que duas retas são paralelas se possuem o mesmo coeficiente angular. Considerando, pois, a inclinação da curva dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3t^2-1}{2t} = C'(t)$$

Tangente $\parallel r(t) \Leftrightarrow C'(t) = 4$

$$\frac{3t^2-1}{2t} = 4 \Rightarrow 3t^2 - 1 = 8t$$

$3t^2 - 8t - 1 = 0 \qquad t = \dfrac{8 \pm 2\sqrt{19}}{6}$ $\Bigg\langle$ $t_1 = \dfrac{4+\sqrt{19}}{3}$, $t_2 = \dfrac{4-\sqrt{19}}{3}$

$\Delta = 64 + 12$

$\Delta = 76$

III-) Desta forma, os pontos de tangência são dados por:

$$P_1 = C\left(\frac{4+\sqrt{19}}{3}\right) = \left(\left(\frac{4+\sqrt{19}}{3}\right)^2, \left(\frac{4+\sqrt{19}}{3}\right)^3 - \left(\frac{4+\sqrt{19}}{3}\right)\right)$$

$$P_2 = C\left(\frac{4-\sqrt{19}}{3}\right) = \left(\left(\frac{4-\sqrt{19}}{3}\right)^2, \left(\frac{4-\sqrt{19}}{3}\right)^3 - \left(\frac{4-\sqrt{19}}{3}\right)\right)$$

IV-) Equações das Tangentes

$$y_1 - \left[\left(\frac{4+\sqrt{19}}{3}\right)^3 - \left(\frac{4+\sqrt{19}}{3}\right)\right] = 4\left(x - \left(\frac{4+\sqrt{19}}{3}\right)^2\right)$$

$$y_2 - \left[\left(\frac{4-\sqrt{19}}{3} \right)^2 - \left(\frac{4-\sqrt{19}}{3} \right) \right] = 4\left(x - \left(\frac{4-\sqrt{19}}{3} \right)^2 \right)$$

Questão 4 (2,0)

(a) (1,0) Determine o comprimento da curva $x(t) = 3t^2$, $y(t) = 2t^3$, para $0 \leq t \leq 3$.

(b) (1,0) Seja $C : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva com componentes $x(t)$ e $y(t)$. Dizemos que a curva C é **regular** se $C'(t) \neq \vec{0}$, para todo $t \in A$. Para qualquer curva regular, podemos definir sua **curvatura no ponto t** através da expressão:

$$\kappa(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Mostre que a curvatura em todo ponto de qualquer circunferência é inversamente proporcional ao seu raio.

a) $x(t) = 3t^2,\ y(t) = 2t^3,\ 0 \leq t \leq 3$

I-) $x'(t) = 6t,\ y'(t) = 6t^2$

II-) $x'(t)^2 = 36t^2,\ y'(t)^2 = 36t^4$

III-) Integral Indefinida:

$$\int \sqrt{36t^2 + 36t^4}\, dt = 6\int t\sqrt{1+t^2}\, dt = 3\int \sqrt{u}\, du = \frac{\cancel{3}\,.\,u^{3/2}}{\frac{\cancel{3}}{2}} =$$

$u = 1 + t^2$
$du = 2t\,dt$

$$= 2\sqrt{u^3} = \boxed{2\sqrt{(1+t^2)^3}}$$

IV-) $$C = \int_0^3 \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt = \left[2\sqrt{(1+t^2)^3}\right]_0^3 = 2\sqrt{(1+9)^3} - 2\sqrt{1}$$

$$= 2 . 10\sqrt{10} - 2$$

$$= \boxed{2(10\sqrt{10} - 1)}$$ u

b) Seja a circunferência de raio "a" e centro com coordenadas (b,c) dada pela parametrização ($a, b, c \in \mathbb{R}$):

$$C(t) = (a\,\text{sen}\,t + b,\ a\cos t + c),\ t \in [0, 2\pi].$$

$x'(t) = a\cos t$, $x''(t) = -a\,\text{sen}\,t$

$y'(t) = -a\,\text{sen}\,t$, $y''(t) = -a\cos t$.

Consideremos, pois, a curvatura k da curva:

$$k(t) = \frac{|x'(t) \cdot y''(t) - x''(t) \cdot y'(t)|}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{|a\cos t(-a\cos t) - (-a\,\text{sen}\,t) \cdot (-a\,\text{sen}\,t)|}{(a^2\cos^2 t + a^2\,\text{sen}^2 t)^{3/2}} =$$

$$= \frac{|-a^2\cos^2 t - a^2\,\text{sen}^2 t|}{(a^2(\cos^2 t + \text{sen}^2 t))^{3/2}} = \frac{|-a^2(\underbrace{\cos^2 t + \text{sen}^2 t}_{1})|}{(a^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{|-a^2|}{a^3} = \frac{\cancel{a^2}}{a^{\cancel{3}}} = \boxed{\frac{1}{a}}$$

$\therefore$ $k(t)$ é inversamente proporcional ao raio "a" da circunferência.