

EM TODAS AS QUESTÕES, JUSTIFIQUE SUA RESPOSTA!

NOME: _____

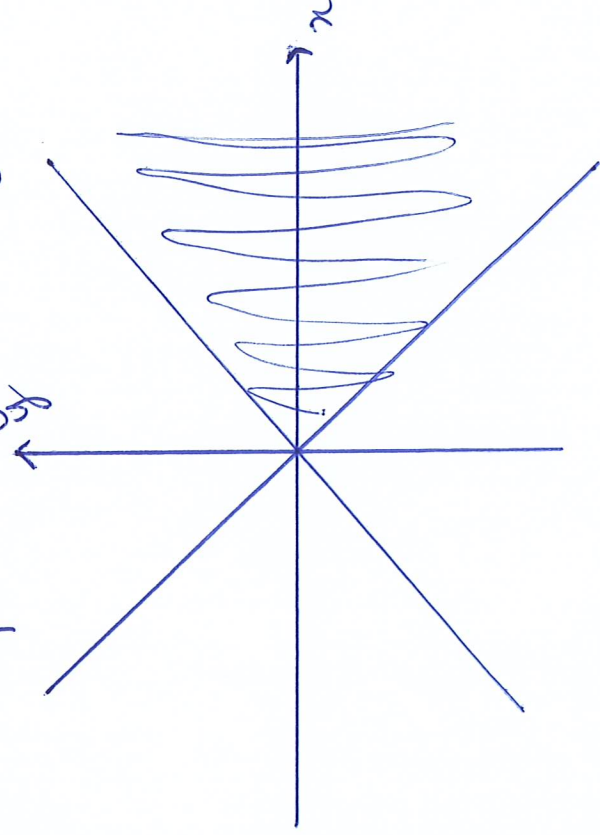
Gabarito - *fechada*NO ~~ESP~~:

IF

Questão 1 (2,5)

(a) Seja $f(x, y) = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}$. Determine e **esboce** o domínio de f .(b) Seja $f(x, y) = e^y \cos(x-y)$. Mostre que $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f$.

$$a) \text{Dom} f = \{(x, y) : x \geq -y, x \geq y\}$$



$$\begin{aligned}
 b) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= -e^y (\sin(x-y)) \\
 \frac{\partial f}{\partial x} &= e^y \cos(x-y) + e^y \sin(x-y) \\
 \frac{\partial f}{\partial y} &= e^y \cos(x-y) + e^y \sin(x-y) - e^y \sin(x-y) \\
 \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial x} &= e^y \cos(x-y) = f(x, y)
 \end{aligned}$$

Questão 2 (2,5)

(a) Se $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$, determine uma parametrização da curva de nível de f no nível $c = 9$.

(b) Se $f(x, y) = (x - y)^2$, determine e **esboce** as curvas de nível de f , nos níveis $c = 0$, $c = 1$ e $c = 4$.

$$a) \frac{1}{x^2 + y^2} = 9 \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow (3x)^2 + (3y)^2 = 1$$

$$3x = \cos t \Rightarrow \alpha(t) = \left(\frac{\cos t}{3}; \frac{\sin t}{3} \right) \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$3y = \sin t$$

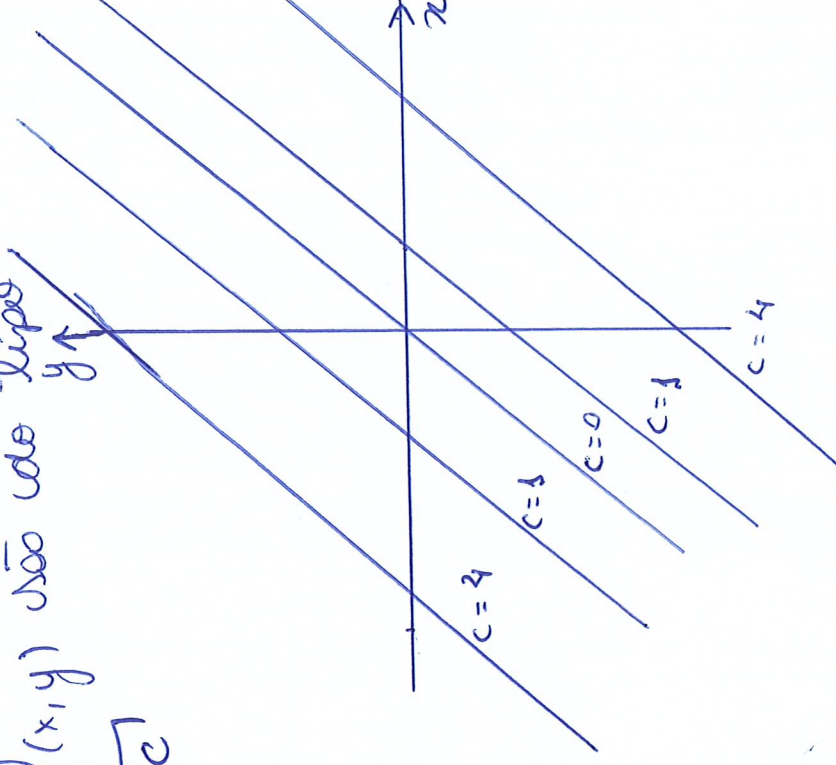
b) As curvas de nível de $f(x, y)$ são do tipo

$$(x - y)^2 = c \Rightarrow x - y = \pm \sqrt{c}$$

$$p/ c = 0, \text{ temos } x - y = 0$$

$$p/ c = 1, \text{ temos } x - y = \pm 1$$

$$p/ c = 4, \text{ temos } x - y = \pm 2$$



Questão 3 (2,0) Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ L & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Determine, caso exista, um número real L para o qual a função f seja contínua em $(0, 0)$.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\text{ pois } \frac{x^2}{x^2 + y^2} \text{ é limitada e } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \cos(x^2 + y^2) = 0$$

$$0 \leq x^2 \leq x^2 + y^2$$

$$0 \leq \frac{x^2}{x^2 + y^2} \leq 1$$

Logo L deve ser 0 .

Questão 4 (3,0) Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

(a) f é contínua em $(0,0)$? Justifique sua resposta.

(b) Determine, caso existam, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$.

$$a) \nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$$

Seja $\alpha(t) = (t, t)$ e $\beta(t) = (t, -t)$ temos:

$$\frac{(t+t)^2}{t^2+t^2} = \frac{4t^2}{2t^2} = 2 \quad ; \quad \frac{(t-t)^2}{t^2+(-t)^2} = 0$$

$\therefore f(x, y)$ não é contínua em $(0,0)$

$$b) \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h+0)^2 - 1}{h^2+0^2} = \frac{1}{h^4}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 1}{h^2} = \frac{1}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$