

EM TODAS AS QUESTÕES, JUSTIFIQUE SUA RESPOSTA!

NOME: _____

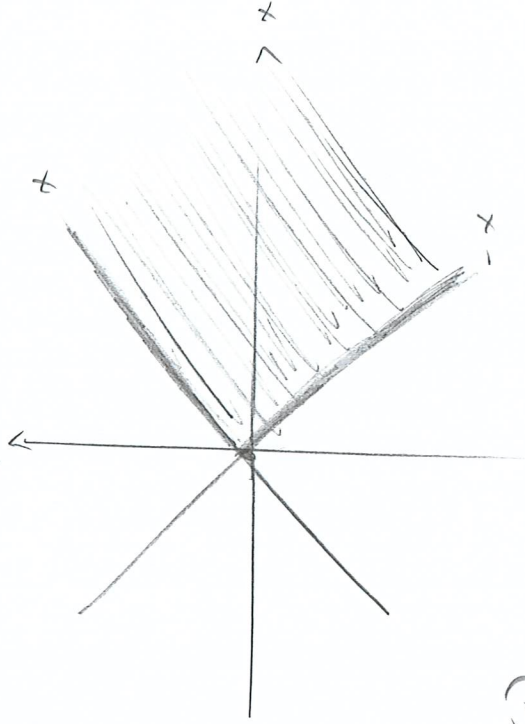
NO. USP: _____

*Gabarito - Fernando***IME****Questão 1 (2,5)**(a) Seja $f(x, y) = \sqrt{x-y} + \sqrt{x+y}$. Determine e esboce o domínio de f .(b) Seja $f(x, y) = \cos(\frac{x}{y})$. Mostre que $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.a) Sabemos que $x-y > 0$ e $x+y > 0$

$$y \leq x$$

$$y > -x$$

$$\therefore \text{Dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x \leq y \leq x\}$$



$$\begin{aligned}
 \text{b) } \frac{\partial f}{\partial x} &= -\sin\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right) = -\sin\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1}{y} \\
 \frac{\partial f}{\partial y} &= -\sin\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{d}{dy}\left(\frac{x}{y}\right) = -\sin\left(\frac{x}{y}\right) \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = \\
 &= \frac{x}{y^2} \cdot \sin\left(\frac{x}{y}\right)
 \end{aligned}$$

$$x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x}{y} \sec\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y} \sec\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

Questão 2 (2,5)

(a) Se $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$, determine uma parametrização da curva de nível de f no nível $c = 4$.

(b) Se $f(x, y) = (x - y)^2$, determine e esboce as curvas de nível de f , nos níveis $c = 0$, $c = 1$ e $c = 4$.

$$a) \quad F(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \quad c = 4.$$

$$4 = \frac{1}{x^2 + y^2} \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

$\therefore$ Trata-se de uma circunferência centrada na origem e de raio $1/2$.

$$\alpha(t) = \left(\frac{\cos t}{2}, \frac{\sin t}{2} \right), \quad t \in [0, 2\pi].$$

$$b) \quad F(x, y) = (x - y)^2$$

Seja $c \in \mathbb{R}$.

$$x - y = \pm \sqrt{c}$$

$$c = (x - y)^2 \quad \Leftrightarrow \quad |x - y| = \sqrt{c} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{y = x \pm \sqrt{c}}$$

$\therefore$ As curvas de nível são retas e, além disso, p/ cada nível $c > 0$, há duas retas.

$$i) \quad \text{nível } c = 0$$

$$\boxed{y = x}$$

$$ii) \quad \text{nível } c = 4$$

$$\boxed{y_1 = x - 2}$$

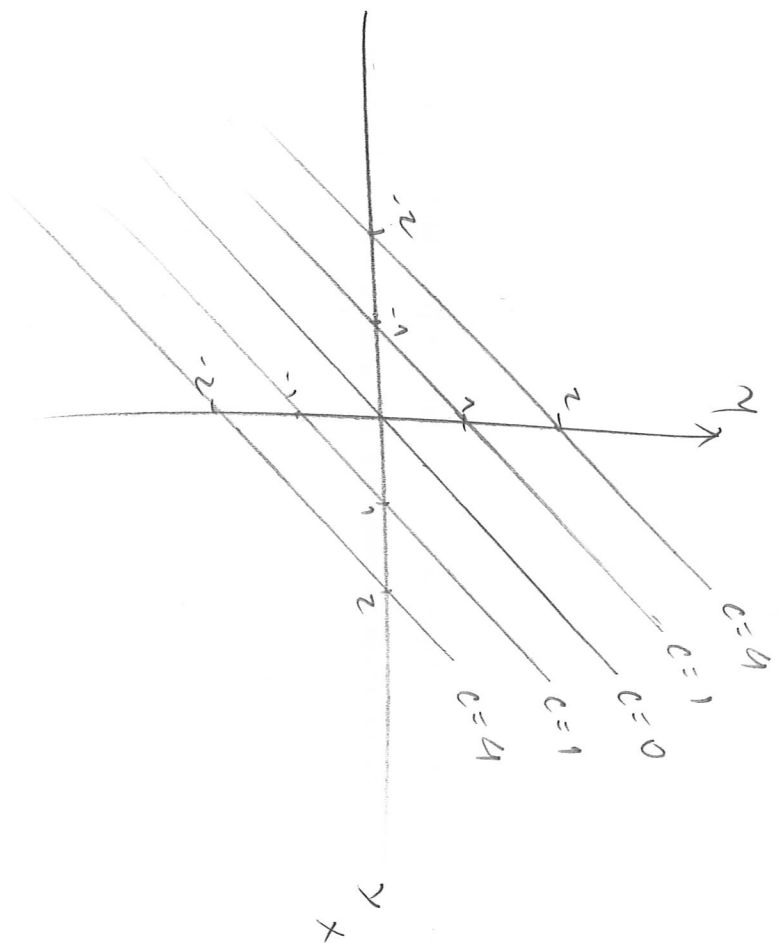
$$\boxed{y_2 = x + 2}$$

$$iii) \quad \text{nível } c = 1$$

$$\boxed{y_1 = x - 1}$$

$$\boxed{y_2 = x + 1}$$

Pontante, o es' logo da curva fixa:



Questão 3 (2,0) Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 \sin(x^2 + y^2)}{x^4 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ L & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Determine, caso exista, um número real L para o qual a função f seja contínua em $(0, 0)$.

$$f \text{ contínua em } (x_0, y_0) \Leftrightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = \underbrace{f(x_0, y_0)}_{e \pi/2}$$

Ou seja, neste caso, se e somente se,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = L \text{ e } \pi/2 \text{ apresentado.}$$

então:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^4 \cdot \sin(x^2 + y^2)}{x^4 + y^2} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \left(\frac{x^4}{x^4 + y^2} \right) \cdot \sin(x^2 + y^2)$$

Limitada $\circ$

$$= 0$$

Portanto, L existe e deve ser 0 .

Questão 4 (3,0) Seja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

(a) f é contínua em $(0,0)$? Justifique sua resposta.

(b) Determine, caso existam, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$.

a) f não é contínua em $(0,0)$, se, e somente se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 1.$$

Calculamos, pois, $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$

F-) Seja $\alpha_1(t) = (0,t)$, $t \in \mathbb{R}$

$$f(\alpha_1(t)) = \frac{t^2}{t^2} = 1.$$

Seja $\alpha_2(t) = (t,t)$, $t \in \mathbb{R}$

$$f(\alpha_2(t)) = \frac{(2t)^2}{2t^2} = \frac{4t^2}{2t^2} = 2.$$

Y-) Desta forma, $\lim_{t \rightarrow 0} f(\alpha_1(t)) \neq \lim_{t \rightarrow 0} f(\alpha_2(t))$

Portanto, $\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = L$.

Logo f não é contínua em $(0,0)$.

$$b) \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x,0) - F(0,0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x-0} = 0.$$

Lower exponents, $F(0,0) = 1$ (constant).

$$\text{II-)} \frac{\partial F}{\partial y}(1,1)$$

$$\frac{d}{dy} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} = \frac{2(x+y) \cdot 1(x^2+y^2) - (x+y)^2 \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{2x^3 + 2xy^2 + 2x^2y + 2y^3 - 2x^2y - 4xy^2 - 2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \boxed{\frac{2x^3 - 2xy^2}{(x^2+y^2)^2}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = \frac{2-2}{(2^2)} = \boxed{0}$$