

EM TODAS AS QUESTÕES, JUSTIFIQUE SUA RESPOSTA!

NOME:

gabrielite - fernanda

NO. USP:

dujo A

Questão 1 - 2,5 Classifique os pontos críticos da função $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$.I-1 Pontos Críticos

$$\nabla f(x, y) = \vec{0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y + x^2$$

$$\text{Assim: } \begin{cases} 2x + 2xy = 0 \Rightarrow 2x(y+1) = 0 \\ x^2 + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{x=0} \text{ ou } \sqrt{y=-1}$$

$$(i) \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad 2y = 0 \Rightarrow \sqrt{y=0}$$

$$(ii) \frac{\partial f}{\partial y} = -1 \quad x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Logo:

$$P_1 = (0, 0), P_2 = (\sqrt{2}, -1), P_3 = (-\sqrt{2}, -1)$$

II-1) Analisando os pontos críticos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2y + 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 2x = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

$$D = H(x_1) = \begin{vmatrix} 2x+2 & 2x \\ 2x & 2 \end{vmatrix}$$

$$(i) \frac{P_1 = (0,0)}$$

$$D_1 = H(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0, \frac{\partial^2}{\partial x^2}(0,0) = 2 > 0$$

$\therefore (0,0)$ é ponto de mínimo.

$$(ii) P_2 = (\sqrt{2}, -1)$$

$$D_2 = H(\sqrt{2}, -1) = \begin{vmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

$\therefore (\sqrt{2}, -1)$ é ponto de sela.

$$(iii) P_3 = (-\sqrt{2}, -1)$$

$$D_3 = H(-\sqrt{2}, -1) = \begin{vmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2 \end{vmatrix} = -4 < 0$$

$\therefore (-\sqrt{2}, -1)$ é ponto de sela.

icv

Questão 2 - 2,0 Seja $f(x, y) = \arctg\left(\frac{x}{y}\right)$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$, nos seguintes casos:

(a) $\vec{u}$ é o vetor de $\vec{i} - 2\vec{j}$;

(b) $\vec{u}$ aponta na direção e sentido de máximo crescimento de f .

Temos que:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \vec{u} = \|\nabla f(x, y)\| \cdot \underbrace{\|\vec{u}\|}_{=1} \cdot \cos \theta, \text{ em que}$$

$$\vec{u}^T = \frac{\vec{v}^T}{\|\vec{v}\|^T}$$

Além disso:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y^2 + x^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{-x}{y^2} = \frac{-x}{y^2 + x^2} \cdot \frac{1}{y^2} = \frac{-x}{x^2 + y^2}$$

$$a) \vec{u} = \frac{(1, -2)}{\|(1, -2)\|} = \frac{(1, -2)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{(1, -2)}{\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}$$

$$= \sqrt{\frac{3\sqrt{5}}{10}}$$

b) A partir, pois, da direção e no sentido do gradiente:

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}}(1,1) = \|\nabla F(1,1)\| \cdot \underbrace{\vec{u}}_1 \cdot \underbrace{\cos \theta}_1 = u \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) u =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

igual

Questão 3 - 2,5 A imagem da curva $\gamma(t) = (2t, t^2, z(t))$ está contida no gráfico de $f(x, y)$. Sabe-se que $f(2, 1) = 3$, $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = 1$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = -1$. Determine a equação da reta tangente a γ no ponto $\gamma(1)$.

I) Que meues uma reta que passe por F em $P = (2, 1, f(2, 1))$. Logo $(2, 1, 3) \in V$.

II-) É necessário, agora, encontrar um vetor diretor de γ . Portanto:

$$\gamma'(t) = (2t, t^2, z'(t)), \text{ em que } z'(t) = f'(x(t))$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \left(2t, 2t, \frac{d}{dt} f(x(t)) \right) = \\ &= \left(2t, 2t, \left(\frac{\partial f}{\partial x}(2t, t^2) \cdot \frac{\partial x}{\partial t}(2t, t^2) \cdot (2, 2t) \right) \right) = \\ &= \left(2t, 2t, 2 \frac{\partial f}{\partial x}(2t, t^2) + 2t \frac{\partial f}{\partial y}(2t, t^2) \right) \end{aligned}$$

$$\therefore \gamma'(1) = (2, 2, 2 - 2) = (2, 2, 0)$$

Assim, a equação de γ em $\gamma(1) \in V$:

$$V = (2, 1, 3) + \lambda (2, 2, 0), \lambda \in \mathbb{R}$$

Questão 4 - 3,0 Sejam $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Sabe-se que o plano tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ tem equação $-2x + 2y - z + 3 = 0$. Determine, entre as curvas abaixo, uma que não pode ser curva de nível de f que contém o ponto (x_0, y_0) :

$$\gamma(t) = \left(-\frac{1}{t}, t\right), \quad \alpha(t) = (t^2, t^3 + t).$$

1-) Se isto ocorre, então $\nabla f(x_0, y_0) = (-2, 2, -1)$

ii-) Sabemos que, neste ponto, o gradiente da função corresponde ao vetor normal do plano e é perpendicular ao vetor diretor de mesma plano no mesmo ponto.
Concluímos, portanto.

$$\gamma'(t) = \left(\frac{1}{t^2}, 1\right), \quad \alpha'(t) = (2t, 3t^2 + 1)$$

Assim:

$$(i) \quad (-2, 2) \cdot \left(\frac{1}{t^2}, 1\right) = 0$$

$$-\frac{2}{t^2} + 2 = 0 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm 1$$

$$(ii) \quad (-2, 2) \cdot (2t, 3t^2 + 1) = 0$$

$$-4t + 6t^2 + 2 = 0 \Rightarrow 3t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$\Delta = 4 - 12$$

$$\Delta = 8 < 0$$

Portanto α não pode ser uma curva de nível nenhuma.