MAT2351 - CÁLCULO - VÁRIAS VARIÁVEIS I

LICENCIATURA NOTURNO

1O SEM 2019 - PROFA. DANIELA M. VIEIRA

TERCEIRA PROVA - 26/06/2019

EM TODAS AS QUESTÕES, JUSTIFIQUE SUA RESPOSTA!

NOME: Gabarito - Leonardo NO. USP: Tipo B

Questão 1 - 2,0 Seja $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1)$, nos seguintes casos:

(a) $\vec{u}$ é o versor de $\vec{i} - 2\vec{j}$;

(b) $\vec{u}$ aponta na direção e sentido de máximo crescimento de f.

Temos que:

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{v}}(x,y) = \nabla F(x,y) \cdot \vec{v}' = \|\nabla F(x,y)\| \cdot \underbrace{\|\vec{v}'\|}_{1} \cdot \cos\theta$$, em que

$$\vec{v}' = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

Além disso:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{\frac{y^2+x^2}{y^{\cancel{2}}}} \cdot \frac{1}{\cancel{y}} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{-x}{y^2} = \frac{-x}{\frac{y^2+x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{\cancel{y^2}} = \frac{-x}{x^2+y^2}$$

a) $$\vec{u} = \frac{(1,-2)}{\|(1,-2)\|} = \frac{(1,-2)}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} = \frac{(1,-2)}{\sqrt{5}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\therefore \frac{\partial F}{\partial \vec{u}}(1,1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{2}{2\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \boxed{\frac{3\sqrt{5}}{10}}$$

b) Aponta, pois, na direção e no sentido do gradiente

$$\therefore \frac{\partial F}{\partial \vec{u}}(1,1) = \|\nabla F(1,1)\| \cdot \underbrace{\|\vec{u}\|}_{1} \cdot \underbrace{\cos\theta}_{1} = \left\|\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)\right\| =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Questão 2 - 2,5 A imagem da curva $\gamma(t) = (2t, t^2, z(t))$ está contida no gráfico de $f(x, y)$. Sabe-se que $f(2, 1) = 3$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = 1$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = -1$. Determine a equação da reta tangente a γ no ponto $\gamma(1)$.

I) Queremos uma reta que tangencia F em $P = (2, 1, F(2,1))$. Logo $(2,1,3) \in r$.

II.-) É necessário, agora, encontrar um vetor diretor de r. Para isto:

$\gamma(t) = (2t, t^2, z(t))$, em que $z(t) = F(\gamma(t))$

Portanto:

$$\gamma'(t) = \left(2, 2t, \frac{d}{dt} F(\gamma(t))\right) =$$

$$= \left(2, 2t, \left(\frac{\partial F}{\partial x}(2t, t^2), \frac{\partial F}{\partial y}(2t, t^2)\right) \cdot (2, 2t)\right) =$$

$$= \left(2, 2t, 2\frac{\partial F}{\partial x}(2t, t^2), 2t\frac{\partial F}{\partial y}(2t, t^2)\right)$$

$$\therefore \gamma'(1) = (2, 2, 2-2) = (2, 2, 0)$$

Assim, a equação de r em $\gamma(1)$ é:

$$r = (2,1,3) + \lambda(2,2,0), \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Questão 3 - 2,5 Determine $c \in \mathbb{R}$ para o qual o plano tangente ao gráfico de $f(x,y) = \ln(x^2 + cy^2)$, no ponto $(2, 1, f(2,1))$, seja perpendicular ao plano $3x + z = 0$.

Queremos um plano perpendicular a $\pi_2: 3x+z=0$

I-) $\vec{n_2} = (3,0,1)$.

II-) Para que os planos sejam perpendiculares, então seus vetores normais devem, também, ser perpendiculares.

Assim:

$$\nabla F(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+cy^2}, \frac{2cy}{x^2+cy^2}, -1\right)$$

$$\nabla F(2,1) = \left(\frac{4}{4+c}, \frac{2c}{4+c}, -1\right)$$

Logo $\nabla F(2,1) \cdot \vec{n_2} = 0$, visto que $\nabla F(1,2) \perp \vec{n_2}$

$$\therefore \left(\frac{4}{4+c}, \frac{2c}{4+c}, -1\right) \cdot (3,0,1) = 0$$

$$\frac{12}{4+c} - 1 = 0 \Rightarrow 4+c = 12 \Rightarrow \boxed{c = 8}$$

Questão 4 - 3,0 Considere a função $f(x, y) = 2cx^4 + y^2 - cx^2 - 2y$. $(c \neq 0)$.

(a) Determine os valores de c para os quais f tenha exatamente dois pontos de sela e um ponto de mínimo local.

(b) Existe $c \in \mathbb{R}$ para o qual a função tenha mais de 3 pontos críticos?

a) I-) Vamos, inicialmente, procurar todos os pontos críticos possíveis. Para tanto:

$\nabla f(x,y) = \vec{0}$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 8cx^3 - 2cx$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - 2$.

$$\begin{cases} 8cx^3 - 2cx = 0 \Rightarrow 2c(4x^3 - x) = 0 \\ 2y - 2 = 0 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

$c = 0$ ou
$4x^3 - x = 0$
$x(4x^2 - 1) = 0$
$x = 0$ ou $4x^2 - 1 = 0$
$x^2 = \frac{1}{4}$
$x = \pm\frac{1}{2}$.

Assim, tais pontos são:

$P_1 = (0,1)$, $P_2 = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $P_3 = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

II-) Segundas Derivadas

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 24cx^2 - 2c$, $\frac{\partial f}{\partial y^2}(x,y) = 2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$.

$$\therefore D = H(x,y) = \begin{vmatrix} 2c(12x^2 - 1) & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4c(12x^2 - 1)$$

(i) $D_1 = H(0,1) = 4c.(-1) = -4c$

(ii) $D_2 = H\left(\frac{1}{2}, 1\right) = 4c\left(12.\frac{1}{4} - 1\right) = 4c.2 = 8c$

(iii) $D_3 = H\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = 4c\left(12.\frac{1}{4} - 1\right) = 8c$.

P/ ser ponto de sela, então $D<0$

P/ ser ponto de mínimo (crítico), então $D>0$.

Assim: $\begin{cases} 8c<0 \Rightarrow c<0 \\ -4c>0 \Rightarrow c<0. \end{cases}$

Ou seja, $c<0$.

b) Os pontos críticos ocorrerão quando:

$$\begin{cases} 8cx^3 - 2cx = 0 \Rightarrow c(8x^3 - 2x) = 0. \\ 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

Portanto, tomando $c=0$, o sistema apresentado passa a possuir infinitas soluções e, desta forma a função passa a ter mais de 3 pontos críticos.

Já, no caso de $c \neq 0$, temos que é impossível existir com mais de 3 pontos críticos.