

EM TODAS AS QUESTÕES, JUSTIFIQUE SUA RESPOSTA!

NOME: gabriel - helicia NO. USP: tipo C

Questão 1 - 2,5 Mostre que os gráficos das funções $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $g(x, y) = \frac{1}{10}(x^2 + y^2) + \frac{5}{2}$ ambos passam pelo ponto $(3, 4, 5)$ e que possuem, nesse ponto, o mesmo plano tangente.

$$(3, 4, 5) = (x, y, f(x, y)) = (x, y, g(x, y))$$

$$f(3, 4) = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$g(3, 4) = \frac{25}{10} + \frac{5}{2} = 5$$

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \quad \nabla g(x, y) = \left(\frac{x}{5}, \frac{y}{5} \right)$$

$$T_f: 3 - 5 = \frac{3}{5}(x - 3) + \frac{4}{5}(y - 4)$$

$$T_f: 3 = \frac{3x}{5} + \frac{4y}{5}$$

$$T_g: 3 - 5 = \frac{3}{5}(x - 3) + \frac{4}{5}(y - 4)$$

$$T_g: 3 = \frac{3}{5}(x - 3) + \frac{4}{5}(y - 4) + 5$$

$$T_g: 3 = \frac{3x}{5} + \frac{4y}{5}$$

$$T_f = T_g$$

Questão 2 - 2,0 Seja $f(x, y) = \arctg\left(\frac{x}{y}\right)$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$, nos seguintes casos:

(a) $\vec{u}$ é o versor de $2\vec{i} - \vec{j}$;

(b) $\vec{u}$ aponta na direção e sentido de máximo crescimento de f .

$$\textcircled{a} \quad \nabla f(x, y) = \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y}, \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) \right)$$

$$\nabla f(1, 1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

$$\vec{u} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

$$\frac{df}{du}(1, 1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}} \right) = \frac{2}{2\sqrt{5}} + \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}$$

\textcircled{b} reduza a expressão do gradiente

$$\frac{df}{du}(1, 1) = -\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Questão 3 - 2,5 Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(t) = (t+1, -t^2)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, seja uma curva de nível de f . Sabendo que $\frac{\partial f}{\partial x}(-1, -4) = 2$, determine a derivada direcional de f no ponto $(-1, -4)$, na direção do vetor $\vec{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

$$\nabla f(\alpha(t)) \alpha'(t) = (f(\alpha(t)))'$$

$$\nabla f(t+1, -t^2)(1, -2t) = 0$$

$$t/t = -2$$

$$\nabla f(-1, -4)(1, 4) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1, -4) + 4 \frac{\partial f}{\partial y}(-1, -4) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1, -4) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(-1, -4) = \left(2, -\frac{1}{2}\right) \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{6}{5} - \frac{4}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

Questão 4 - 3,0 Considere a função $f(x, y) = 2cx^4 + y^2 - cx^2 - 2y$ ($c \neq 0$)

(a) Determine os valores de c para os quais f tenha exatamente um ponto de sela e dois pontos de mínimo local.

(b) Existe $c \in \mathbb{R}$ para o qual a função tenha ao menos um máximo local?

(a) $\nabla f(x, y) = (8cx^3 - 2cx, 2y - 2) = 0$

$$\begin{cases} 8cx^3 - 2cx = 0 & \Rightarrow y = 1 \\ 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$2cx(4x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2} \text{ ou } cx = 0, \text{ como } c \neq 0 \Rightarrow x = 0$$

$$P_1 = \left(\frac{1}{2}, 1\right) \quad P_2 = \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \quad P_3 = (0, 1)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 24cx^2 - 2c \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2$$

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 24cx^2 - 2c & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 48cx^2 - 4c = 4c(12x^2 - 1)$$

$$H\left(\frac{1}{2}, 1\right) = 8c \quad H\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = 8c \quad H(0, 1) = -4c$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2}, 1\right) = 4c \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = 4c \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 1) = -2c$$

$\forall c > 0$ temos exatamente um ponto de sela $(0, 1)$ e dois pontos de mínimo $\left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$

⑤ $c > 0$, pelo exercício anterior, não é possível ter um máximo local.

$c < 0$ temos:

$$H\left(\frac{1}{2}, 1\right) = 8c < 0 \quad H\left(-\frac{1}{2}, 1\right) = 8c < 0$$

$$H(0, 1) = -4c > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 1) = -2c > 0$$

Logo são 2 pontos de sela e um mínimo local e portanto não existe $c \in \mathbb{R}$!