

EM TODAS AS QUESTÕES, JUSTIFIQUE SUA RESPOSTA!

NOME: gabriel - felicia NO. USP: 5195 DQuestão 1 - 3,0 Classifique os pontos críticos da função $f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 2$.

$$\nabla f(x, y) = (6xy - 6x, 3x^2 + 3y^2 - 6y) = 0$$

$$\begin{cases} 6xy - 6x = 0 & \Rightarrow 6x(y - 1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } y = 1 \\ 3x^2 + 3y^2 - 6y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Se } x = 0 \Rightarrow 3y^2 - 6y = 0 \Rightarrow 3y(y - 2) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ ou } y = 2$$

$$P_1 = (0, 0) \quad P_2 = (0, 2)$$

$$\text{Se } y = 1 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$P_3 = (1, 1) \quad P_4 = (-1, 1)$$

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 6y - 6 & 6x \\ 6x & 6y - 6 \end{bmatrix} \Rightarrow H(x, y) = 36y^2 - 72y + 36 - 36x^2$$

$$H(0, 2) = 36 > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 2) = 6 > 0$$

$$H(0, 0) = 36 > 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = -6 < 0$$

$$H(1,1) = -36 < 0 \quad \text{au point } (1,1)$$

$$H(-1,1) = -36 < 0$$

$\therefore P_1 = (0,2)$ minimum local

$P_2 = (0,0)$ maximum local

$P_3 = (1,1)$ point de selle

$P_4 = (-1,1)$ point de selle

Questão 2 - 2,5

(a) Determine um plano que seja tangente ao gráfico de $f(x, y) = x^2 + xy$ e paralelo ao plano $z = 2x + 3y$.

(b) Determine uma reta tangente à curva $x^2 + xy + y^2 = 7$ e paralela à reta $4x + 5y = 17$.

(a) $f(x, y) = x^2 - xy = 0 \Rightarrow z = x^2 - xy \Rightarrow x^2 - xy - z = 0$
 Superfície da nível
 do função $f(x, y, z)$

$$\nabla f(x, y, z) = (2x + y, x, -1)$$

Logo (x_0, y_0, z_0) ponto de tangência

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = (2x_0 + y_0, x_0, -1) \parallel 2x + 3y - z = 0$$

$$(2x_0 + y_0, x_0, -1) = \lambda (2, 3, -1)$$

$$\begin{cases} 2x_0 + y_0 = 2\lambda \\ x_0 = 3\lambda \end{cases} \Rightarrow 2 \cdot 3\lambda + y_0 = 2\lambda \Rightarrow y_0 = -4\lambda$$

$$\therefore x_0 = 3\lambda, y_0 = -4\lambda, z_0 = 9\lambda - 12\lambda^2$$

$$(3\lambda)^2 - 12\lambda^2 - 9\lambda + 12\lambda^2 = 0$$

$$9\lambda^2 - 9\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ou } \lambda = 1$$

2

$$(x_0, y_0, z_0) = (3, -4, -3)$$

$$T: (2, 3, -1) (x - 3, y + 4, z + 3) = 0$$

$$T: z = 2x + 3y + 3$$

⑥ $x^2 + xy + y^2 = 7$ curve da nivel do func $f(x, y)$

$$\nabla f(x, y) = (2x + y, x + 2y) \parallel (4x + 5y = 17)$$

$$\begin{cases} 2x + y = 4\lambda \\ x + 2y = 5\lambda \end{cases} \Rightarrow x = \frac{4\lambda - y}{2}$$

$$\frac{4\lambda - y}{2} + 2y = 5\lambda \Rightarrow \frac{3y}{2} = 3\lambda$$

$$\Rightarrow y = 2\lambda, \quad x = \lambda$$

$$\lambda^2 + 2\lambda^2 + 4\lambda^2 = 7 \Rightarrow 7\lambda^2 = 7 \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

$$R_{T_1}: (1, 2) + t(+4, +5)$$

$$R_{T_2}: (-1, -2) + t(+4, +5)$$

Questão 3 - 2,5 Seja f uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$ tal que $\gamma(t) = (t+1, -t^2)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, seja uma curva de nível de f . Sabendo que $\frac{\partial f}{\partial x}(-1, -4) = 2$, determine a derivada direcional de f no ponto $(-1, -4)$, na direção do vetor $\vec{u} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

$$\begin{aligned}\nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) &= (f(\alpha(t)))' \\ \nabla f(t+1, -t^2) \cdot (1, -2t) &= 0\end{aligned}$$

$$8/t = -2$$

$$\nabla f(-1, -4) \cdot (1, 4) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(-1, -4) + 4 \frac{\partial f}{\partial y}(-1, -4) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1, -4) = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(-1, -4) = (2, -\frac{1}{2}) \cdot \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = \frac{6}{5} - \frac{4}{10} = \frac{8}{10}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(-1, -4) = \frac{4}{5}$$

Questão 4 - 2,0 Seja $f(x, y) = \arctg\left(\frac{x}{y}\right)$. Calcule $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1, 1)$, nos seguintes casos:

(a) $\vec{u}$ é o vetor de $\vec{i} - 2\vec{j}$;

(b) $\vec{u}$ aponta na direção e sentido de máximo crescimento de f .

$$a) \nabla f(x, y) = \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} ; \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) \right)$$

$$\nabla f(1, 1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right)$$

$$\frac{df}{du}(1, 1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}$$

b) direção e sentido do gradiente

$$\frac{df}{du}(1, 1) = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$