Prova Substitutiva - Física 2 (4302112) - IFUSP - Dezembro de 2016 - Diurno

Nome: GABARITO Nº USP: ____________ Turma/Prof.: ____________

Atenção! Esta prova pode substituir uma única prova e/ou uma única provinha que tenha(m) sido perdida(s) — um maior número de substituições só poderá ser efetuado com justificativas devidamente documentadas. Para substituir uma determinada provinha, será necessário responder a questão e o problema correspondentes a ela. Para substituir uma determinada prova será necessário responder duas questões e dois problemas correspondentes, conforme indicado nas folhas da prova, e mais uma questão e um problema escolhidos livremente pelo aluno entre as demais questões e problemas da prova. As questões têm peso 4/10 e os problemas peso 6/10.

Favor indicar aqui as substituições elegidas: Provinha: 1( ), 2( ), 3( ), 4( ); Prova: 1( ), 2( ), 3( ).

Prova 1 (e/ou provinha 1)

[4,0]

Quest.1. O movimento de um objeto de massa m ao longo do eixo x pode ser bem descrito pela equação

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+\underbrace{\omega_0^2}_{m}x=D\cos\left(\omega_{\text{ext}}t+\varphi\right),$$

sendo $b>0$, ω_0, D, ω_{ext} e φ constantes.

[1,0] (a) Descreva que forças atuam sobre o objeto, identificando o termo correspondente da equação diferencial.

Força elástica $-m\omega_0^2 x$.

Força de atrito viscoso $-bv=-b\frac{dx}{dt}$.

Força externa periódica $D\cos(\omega_{ext}t+\varphi)$.

Para os itens restantes, indique se as afirmações a seguir, a respeito do movimento do objeto, são verdadeiras ou falsas, **justificando** suas respostas.

[1,5] (b) O movimento desse objeto provoca uma oscilação "ressonante", cuja amplitude cresce em função do tempo, eventualmente destruindo o sistema.
Verdadeiro ( ) Falso (✓)

O termo de atrito viscoso garante a dissipação da energia injetada pela força externa e impede o crescimento indefinido da amplitude de oscilação.

[1,5] (c) Depois de um tempo suficientemente longo o movimento do objeto será uma oscilação com frequência ω_{ext}, quaisquer que sejam os valores de m, ~~k~~ e ~~b~~ ω_0.
Verdadeiro (✓) Falso ( )

A solução geral da equação do movimento contém um termo transiente, que desaparece para tempos longos, e uma solução estacionária, que vamos escrever na forma $\mathrm{Re}(Ae^{i\lambda t})$, sendo λ a frequência estacionária. Substituindo na forma complexa da equação do movimento, temos

$$-\lambda^2 mAe^{i\lambda t}+i\lambda bAe^{i\lambda t}+m\omega_0^2Ae^{i\lambda t}=De^{i\varphi}e^{i\omega_{ext}t}.$$

Para que a equação acima seja válida em instantes arbitrários, devemos ter $\boxed{\lambda=\omega_{ext}}$, quaisquer que sejam os demais parâmetros físicos.

[6,0]

Prob.1. Um objeto de massa m interage com outro de massa muito maior, em uma dimensão, através de um potencial $U(x) = U_0(e^{ax^2} - 1)$, onde x é a distância entre os centros de massa dos dois objetos, e U_0 e a são constantes características do sistema.

[3,0] (a) Determine a frequência angular de pequenas oscilações desse sistema (válida até segunda ordem em x), em termos de suas constantes características e da massa.

[2,0] (b) Nessa aproximação, se no instante $t = 0$ o objeto de massa m se encontra no ponto $x = 0$ com velocidade $v_x = v_0$, em que ponto o objeto se encontrará no instante $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{aU_0}}$, na ausência de forças dissipativas?

[1,0] (c) Decreva qualitativamente o movimento do objeto caso o sistema fosse imerso em um fluido tal que o coeficiente da força viscosa ($F_{x\text{visc}} = -bv_x$) sobre o objeto fosse $b \ll 2\sqrt{maU_0}$.

(a) A expansão em série de Taylor da função e^x produz

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

de modo que, se $x^2 << 1/a$, podemos escrever

$$e^{ax^2} - 1 \simeq (1 + ax^2) - 1 = ax^2.$$

A energia potencial nesse limite assume a forma

$$U(x) \simeq U_0 a x^2.$$

A força associada é então $F_x = -\frac{dU}{dx} = -(2U_0 a)x \equiv -kx$.

A equação de movimento $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \equiv -m\omega_0^2 x$

nos leva à frequência angular $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2U_0 a}{m}}.}$

(b) A solução da equação de movimento é

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow v(t) = -\omega_0 A \,\text{sen}(\omega_0 t + \varphi),$$

e ajustando as condições iniciais $x(0) = 0$ e $v(0) = v_0$,

temos $\begin{cases} A\cos\varphi = 0 \\ -\omega_0 A\,\text{sen}\,\varphi = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = -\frac{\pi}{2}, \\ A = \frac{v_0}{\omega_0}. \end{cases}$

Assim, $\boxed{x\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{aU_0}}\right) = \frac{v_0}{\omega_0}\,\text{sen}\left(\omega_0 \cdot \frac{\pi}{2}\frac{\sqrt{2}}{\omega_0}\right) = \frac{v_0}{\omega_0}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right).}$

(c) Como o amortecimento é muito pequeno, o objeto executaria oscilações com amplitude que diminuiria com o tempo (exponencialmente), até que, após um longo tempo, estaria praticamente em repouso na origem.

[4,0]

Prova 1 (e/ou provinha 2)

Quest.2. Uma martelada é dada na ponta esquerda de uma barra muito longa e fina, colocada horizontalmente sobre o solo, resultando em um pulso de deformação $D_x(x,t)$ descrito por $D(x,0) = \frac{a}{b+x^4}$ no instante $t = 0$, quando o valor máximo de D passa pelo ponto $x = 0$. Suponha que o pulso se propaga sem atenuação e com velocidade V_x ao longo da barra.

[2,0] (a) Qual é a expressão $D(x,t)$ que descreve o pulso em um instante qualquer?

[1,0] (b) Qual é o valor de $D(0,t_1)$, no instante $t_1 = \frac{\sqrt[4]{b}}{V_x}$?

[1,0] (c) Nesse instante a densidade de energia potencial elástica no ponto $x = 0$ é positiva, negativa, ou nula? Justifique.

(a) A propagação de ondas sonoras lineares em um sólido satisfaz a equação de onda,

$$\frac{\partial^2 D}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 D}{\partial x^2},$$

em que c é a velocidade de propagação das ondas. As soluções gerais dessa equação são do tipo $D(x \pm ct)$, que descrevem ondas propagando-se no sentido positivo (−) ou negativo (+) do eixo x. ~~Adotando~~ um sistema de referência orientado para a direita, temos então

$$D(x,t) = D(x-ct) = D(x - V_x t),$$

e para que $D(x,0) = a/(b+x^4)$ devemos ter

$$D(x,t) = \frac{a}{b+(x-V_x t)^4}$$

(b) Temos $D(0, b^{1/4}/V_x) = \dfrac{a}{b+b} = \dfrac{a}{2b}$.

(c) A energia potencial microscópica associada à deformações é proporcional ao quadrado da deformação local. Logo, a menos que a deformação local seja nula (o que não é o caso na posição $x=0$, pela resposta do item anterior), a densidade de energia potencial será sempre positiva.

[6,0]

Prob.2. Uma pessoa que se prepara para um treino de canoagem está parada em uma das margens da raia olímpica da USP. Em um sistema de referência onde o eixo x é orientado de uma ponta à outra da raia, da esquerda para a direita dessa pessoa, ela observa uma onda deslocando-se segundo a equação

$$y(x,t) = 4.0\cos(0.5x + 5.0t),$$

em que y é o deslocamento perpendicular à superfície da água, em relação ao nível da água sem perturbação na raia. As unidades estão no sistema CGS (centímetros, gramas e segundos).

[1,2] (a) Quanto tempo leva para que uma oscilação completa passe por essa pessoa?

[1,2] (b) Qual é a distância entre duas cristas de onda consecutivas?

[1,2] (c) Qual é o número de onda k e o número de oscilações por segundo que passam pela pessoa?

[1,2] (d) Com que rapidez uma crista de onda se desloca? E qual é o sentido de deslocamento da onda, no sistema de referência adotado?

[1,2] (e) Qual é a rapidez máxima de oscilação vertical (para cima e para baixo) da onda?

A equação que descreve a onda está na forma

$$y(x,t) = A\cos(kx + \omega t),$$

em que A é a amplitude da onda, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ é o número de onda associado ao comprimento de onda λ, e $\omega = \frac{2\pi}{T}$ é a frequência angular associada ao período T. Temos assim

$$A = 4{,}0\ \text{cm}, \quad k = 0{,}5\ \text{cm}^{-1} \quad \text{e} \quad \omega = 5{,}0\ \text{rad/s}.$$

(a) Esse tempo é o período T da onda, dado por

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = (0{,}4\pi)\,\text{s} \simeq 1{,}3\ \text{s}}$$

(b) Essa distância é o comprimento de onda, dado por

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k} = (4{,}0\pi)\,\text{cm} \simeq 13\ \text{cm}}$$

(c) O número de onda é $k = 0{,}5\ \text{cm}^{-1}$ e o número de oscilações que passam pela pessoa a cada segundo é $\boxed{\frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}4\pi}\,\text{s}^{-1} \simeq 0{,}8\ \text{s}^{-1}}$

(d) A rapidez da onda é

$$\boxed{c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = 10 \text{ cm/s}}.$$

O pulso propaga-se para a esquerda, uma vez que para uma fase fixa φ temos

$$\varphi = kx + \omega t \Rightarrow x = \frac{\varphi}{k} - ct.$$

(e) A velocidade da oscilação vertical é

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -20 \operatorname{sen}(0{,}5x + 5{,}0t),$$

logo seu máximo valor é de 20 cm/s, uma vez que a função seno varia de -1 a $+1$.

[4,0]

Prova 2 ou 3 (e/ou provinha 3)

Quest.3. Um pequeno "sólido de Einstein" é formado por 9 osciladores quânticos, contendo somente 3 quanta de energia: $E = E_0 + 3\hbar\omega$. Represente por k_B a constante de Boltzman, quando necessário.

[0,5] (a) Quantos átomos esse "sólido" contém? **Justifique.**

[0,5] (b) Faça um esboço dos diagramas de energia de um desses átomos, para uma configuração qualquer em que 2 dos 3 quanta de energia estejam contidos nele.

[2,0] (c) Qual seria a entropia total do sólido na condição em que exatamente 2 quanta estejam nesse átomo?

[1,0] (d) Qual seria a entropia total do sólido sem nenhuma restrição sobre a distribuição dos 3 quanta no sólido?

(a) No modelo do sólido de Einstein, cada átomo é representado por 3 osciladores, de modo que 9 osciladores devem representar 3 átomos.

(b)

(c) Genericamente, há $\frac{(q+N-1)!}{q!\,(N-1)!}$ maneiras de arranjar q quanta entre N osciladores. Logo, para que exatamente 2 quanta estejam no primeiro átomo, e 1 quantum esteja nos demais átomos, o número de maneiras é

$$\Omega = \underbrace{\frac{(2+3-1)!}{2!\,(3-1)!}}_{\substack{\text{2 quanta}\\ \text{no 1º átomo}\\ (N=3)}} \cdot \underbrace{\frac{(1+6-1)!}{1!\,(6-1)!}}_{\substack{\text{1 quantum}\\ \text{no 2º átomo}\\ (N=3)}} = \frac{4!}{2!\,2!} \cdot \frac{6!}{1!\,5!} = 36.$$

A relação entre entropia e número de microestados é $S = k_B \ln \Omega$, logo

$\boxed{S = k_B \ln(36)}$. ou $\boxed{S = 2k_B \ln 6}$

(d) Se não há restrições quanto à distribuição da energia entre os átomos, temos

$$\Omega = \frac{(3+9-1)!}{3!\,(9-1)!} = \frac{11!}{3!\,8!} = \frac{11 \cdot \cancel{10}^{5} \cdot \cancel{9}^{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 165$$

e assim

$\boxed{S = k_B \ln(165)}$

[6,0]

Prob.3. Um mol de uma substância hipotética apresenta uma entropia como função da energia dada por $S(E) = a\sqrt{E}$, a volume constante.

[3,0] (a) Qual é a capacidade térmica molar a volume constante dessa substância, em função da temperatura?

[3,0] (b) Qual é a energia necessária para elevar a temperatura de um mol dessa substância, do zero absoluto até $T = 2\text{K}$, dado $a = 3.0\ \text{J}^{1/2}\text{K}^{-1}$

(a) A volume constante, a relação entre entropia, energia e temperatura é

$$\frac{1}{T} = \frac{dS}{dE} \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{1}{2} a E^{-1/2} \Rightarrow E = \left(\frac{a}{2} T\right)^2.$$

A capacidade térmica a volume constante é então

$$\boxed{C_v = \frac{dE}{dT} = \frac{2a^2}{4} T = \frac{a^2}{2} T.}$$ (1 mol)

(b) Supondo o volume constante, temos

$$\Delta E = \int_{T_i}^{T_f} C_v\, dT = \frac{a^2}{2} \int_{T_i}^{T_f} T\, dT = \frac{a^2}{4}\left(T_f^2 - T_i^2\right),$$

logo, se $a = 3{,}0\ \text{J}^{1/2}/\text{K}$, $T_i = 0$ e $T_f = 2\text{K}$,

$$\boxed{\Delta E = \frac{9{,}0}{4} \times (4 - 0) = 9{,}0\ \text{J}}$$

É claro que isso poderia ter sido calculado também simplesmente pela expressão para $E(T)$ obtida no item (a).

[4,0]

Prova 2 ou 3 (e/ou provinha 4)

Quest.4. Assinale com V (verdadeiro) ou F (falso) cada uma das alternativas abaixo (**justifique** sucintamente cada uma):

[1,0] (V) Em um processo isotérmico reversível, a variação da entropia é igual à energia transferida na forma de calor para o gás dividida pela temperatura absoluta do mesmo.

Se estamos nos referindo à entropia do gás, $\Delta S = Q/T = -\Delta S_{res}$, em que ΔS_{res} é a variação da entropia do reservatório que mantém o gás à temperatura T, uma vez que em um processo reversível a variação na entropia do Universo é nula.

[1,0] (V) Em um processo real em que não há transferência de energia na forma de calor, a variação da entropia pode ser positiva.

Basta que se trate de um processo irreversível, como a expansão livre de um gás.

[1,0] (F) Em um processo isobárico, o gás nunca realiza trabalho.

Em uma expansão isobárica o gás realiza trabalho.

[1,0] (V) O trabalho líquido total realizado por um sistema em um ciclo termodinâmico é sempre igual à transferência líquida de calor para esse sistema.

Desde que se trate de um fluido simples (sem reações químicas, trabalho elétrico ou outros processos "exóticos"), vale a conservação da energia na forma da 1ª lei da termodinâmica,

$$\Delta E = Q + W,$$

em que W é o trabalho realizado sobre o sistema, por sua vez igual a $-W_{sis}$, sendo W_{sis} o trabalho realizado pelo sistema.

Assim, $\Delta E = Q - W_{sis}$, e em um processo cíclico, para o qual $\Delta E = 0$, temos $Q = W_{sis}$, sendo Q a transferência líquida de energia na forma de calor para o sistema.

[6,0]

Prob.4. O êmbolo de uma seringa tampada contendo 1 mol de gás hélio é comprimido adiabaticamente até que o volume diminua à metade do volume inicial. Em seguida, o êmbolo é deslocado lentamente, mantendo-se a temperatura do gás constante, até que seja atingido o volume inicial. **Dado:** a contante universal do gases é igual a 8,31 J/mol/K.

[1,0] (a) Faça um esboço desses dois processos em um diagrama *P-V*, identificando claramente as duas etapas.

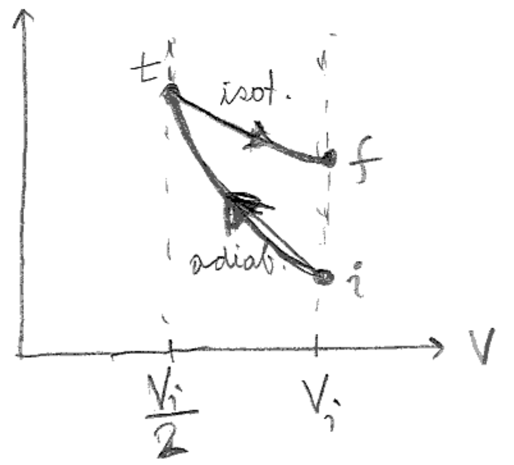
[1,0] (b) Qual é a razão entre a pressão final e a pressão inicial da primeira etapa?

[2,0] (c) Qual é a transferência de energia na forma de calor para o gás na segunda etapa, tendo esta sido realizada a uma temperatura de 300 K?

[2,0] (d) Qual é a variação da entropia do gás desde o estado inicial (início da primeira etapa) até o final (fim da segunda etapa)?

Obs.: As respostas dos itens (b) a (d) devem ser expressões contendo apenas números, sem variáveis. Entretanto, não é necessário calcular valores numéricos de funções trascendentais.

(a)



$V_t = \frac{V_i}{2}$, $V_f = V_i$

(b) Em uma adiabática, temos PV^γ = constante, com $\gamma = 5/3$ para um gás ideal monoatômico, modelo que vamos utilizar para o hélio.

Temos assim $P_i V_i^\gamma = P_t V_t^\gamma \Rightarrow \frac{P_t}{P_i} = \left(\frac{V_i}{V_t}\right)^\gamma$,

ou seja, $\boxed{\frac{P_t}{P_i} = 2^{5/3}}$

(c) Como se trata de uma isoterma, temos $\Delta E = Q + W = 0 \Rightarrow Q = -W = \int_{V_t}^{V_i} P\,dV$. Mas $PV = nRT$, de modo que

$Q = nRT \int_{V_t}^{V_i} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_i}{V_t}$. Com $n = 1$ e $T = 300\,K$,

$\boxed{Q = (2490 \ln 2)\ J}$

(d) A variação de entropia entre i e f pode ser calculada por qualquer caminho reversível. Vamos então utilizar a isocórica entre i e f, obtendo

$$\Delta S = \int \frac{dQ}{T} = \int \frac{nC_V\, dT}{T} = nC_V \ln \frac{T_f}{T_i},$$

em que $C_V = \frac{3}{2}R$ é o calor específico molar de um gás ideal monoatômico.

Conhecemos T_f (300 K), mas não T_i, que vamos calcular lembrando que $T_t = T_f$, com i e t conectados por uma adiabática.

Temos
$$\left.\begin{aligned} P_t V_t &= nRT_t = nRT_f \\ P_i V_i &= nRT_i \end{aligned}\right\} \quad \frac{P_t V_t}{T_f} = \frac{P_i V_i}{T_i},$$

de modo que
$$T_i = \left(\frac{P_i V_i}{P_t V_t}\right) T_f = \left(\frac{P_i V_i^{\gamma}}{P_t V_t^{\gamma}}\right) \frac{V_i^{1-\gamma}}{V_t^{1-\gamma}} T_f = \left(\frac{V_i}{V_t}\right)^{1-\gamma} T_f,$$

pois $P_i V_i^{\gamma} = P_t V_t^{\gamma}$. Temos assim

$$T_i = 2^{-2/3}\, T_f,$$

de modo que

$$\Delta S = nC_V \ln 2^{2/3} = n \cdot \frac{2}{3} C_V \ln 2,$$

ou seja,

$$\boxed{\Delta S = +(8{,}31 \ln 2)\ \mathrm{J/K}}.$$

O cálculo é mais simples se recordarmos que no trecho adiabático não há variação de entropia, e calcularmos a variação de entropia ao longo da isoterma.