

Prova 2 — Física 2 (4302112) — IFUSP — 24/10/2018 — Diurno

Nome: _____ N° USP: _____ Turma/Prof.: _____

- Não é permitido o uso de calculadoras ou celulares.
- Justifique sucintamente as respostas com frases curtas e/ou deduções, esquemas etc. Respostas sem justificativa não serão consideradas.

1. [2 pontos] Um barco a motor emite um apito de frequência f_b . Quando o barco se afasta da margem de um lago, com velocidade de magnitude v_b , um pescador parado na margem escuta o apito a uma frequência f_p . Nesse dia, não estava ventando e a velocidade do som no ar é v_s . Nos blocos a seguir, assinale as alternativas corretas quanto às propriedades do som do apito emitido pelo barco ao se afastar da margem.

- (a) () O comprimento de onda do som do apito no ar é $\lambda_{\text{ar}} = \frac{v_s + v_b}{f_b}$.
- (b) () O comprimento de onda do som do apito no ar é $\lambda_{\text{ar}} = \frac{v_s}{f_b}$.
- (c) () O comprimento de onda do som do apito no ar é $\lambda_{\text{ar}} = \frac{v_s - v_b}{f_b}$.

Justifique:

Como o barco se afasta da margem, o pescador, parado na margem, escuta o som do apito do barco mais grave em relação ao som original. Som mais grave significa um comprimento de onda maior. Se o barco estivesse parado em relação ao pescador, o comprimento de onda do som do apito no ar seria $\lambda_{\text{ar}} = v_s/f_b$, portanto, o item (b) está excluído. O item (c) forneceria um comprimento de onda menor que o do som original, portanto, também excluído. O item (a) é o único compatível com a situação física que de fato ocorre.

Note que λ_{ar} é diferente do comprimento de onda do som que o apito do barco emitiria se o mesmo estivesse parado.

- (a) () O pescador escuta uma frequência $f_p = \frac{v_s}{\lambda_{\text{ar}}}$.
- (b) () O pescador escuta uma frequência $f_p = \frac{v_s - v_b}{\lambda_{\text{ar}}}$.
- (c) () O pescador escuta uma frequência $f_p = \frac{v_s + v_b}{\lambda_{\text{ar}}}$.

Justifique:

Como o pescador está parado com relação ao ar, o som que ele ouve possui frequência associada ao comprimento de onda no ar de acordo com $f_p = v_s/\lambda_{\text{ar}}$. Se o pescador estivesse se aproximando da fonte (barco), a frequência do som que ele ouviria seria maior do que v_s/λ_{ar} (som mais agudo, item (c)), e se ele estivesse se afastando, seria menor do que v_s/λ_{ar} (som mais grave, item (b)).

2. [2 pontos] Uma lâmpada desligada de massa m_L cai do teto a uma altura H para dentro de um balde de isopor colocado no chão, contendo uma massa $m_a \gg m_L$ de água, cujo calor específico (por unidade de massa) é c_a . A lâmpada não se quebra, e a água não espirra para fora do balde. Toda a casa estava à temperatura ambiente. Assinale as alternativas que contêm afirmações corretas e, de acordo com elas, determine qual é o aumento da temperatura ΔT da água após atingido o equilíbrio no interior do balde.

- (a) () A variação de temperatura da água é zero, porque a lâmpada estava inicialmente à mesma temperatura que a água.
- (b) () A energia transferida sob a forma de calor da lâmpada para a água é $Q = m_L g H$.
- (c) () A capacidade térmica da lâmpada é desprezível e pode ser ignorada no cálculo da variação de temperatura.
- (d) () A energia cinética da lâmpada ao atingir a água acaba por se transformar em energia térmica, aumentando a energia interna da água.
- (e) () O trabalho da força gravitacional sobre o sistema lâmpada+água corresponde à variação da energia interna desse sistema.

$$(f) \Delta T = \frac{m_L g H}{m_a c_a}$$

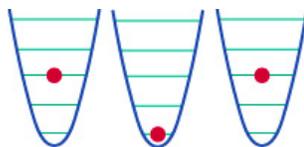
O trabalho da força gravitacional sobre o sistema lâmpada+água resulta num aumento de energia cinética da lâmpada, e consequentemente, do sistema lâmpada+água. Essa energia cinética acaba por se transformar em energia térmica do sistema lâmpada+água, e como consequência, aumenta a energia interna da água. Como $m_L \ll m_a$, a capacidade térmica da lâmpada é desprezível e pode ser ignorada no cálculo da variação da temperatura. Com isso, a energia transferida sob forma de calor da lâmpada para a água é $Q = m_L g H = m_a c_a \Delta T$. Temos, portanto, $\Delta T = \frac{m_L g H}{m_a c_a}$.

3. [1 ponto] Joãozinho tem 3 bolas de gude vermelhas, 1 azul e 4 amarelas. As bolas são todas idênticas, exceto pela cor. De quantas maneiras visivelmente diferentes Joãozinho pode formar uma fila linear, da esquerda para a direita, contendo as 8 bolas encostadas umas nas outras? Explique.

Inicialmente, vamos supor que todas as bolas de gude fossem enumeradas (distinguíveis), por exemplo, as bolas 1, 2 e 3 vermelhas, a bola 4 azul, e as bolas 5, 6, 7 e 8 amarelas. Então teríamos $(3 + 1 + 4)! = 8!$ maneiras de combiná-las. Se, agora, pintarmos os números das bolas 1, 2 e 3 completamente de vermelho tornando-as indistinguíveis entre si, então teríamos $3!$ das $8!$ combinações que se tornariam indistinguíveis, e que deveriam ser contabilizadas apenas uma vez. Portanto, $8!/3!$ seria o número de combinações possíveis das bolas 4, 5, 6, 7 e 8 enumeradas, mas as bolas 1, 2 e 3 indistinguíveis.

Estendendo esse raciocínio para as demais bolas, temos que o número de combinações visivelmente distinguíveis de 3 bolas de gude vermelhas, 1 azul, e 4 amarelas é dado por $\frac{8!}{3!1!4!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3 \times 2 \times 4!} = 8 \times 7 \times 5 = 280$.

4. [2 pontos] A figura abaixo apresenta uma configuração particular de 3 osciladores quânticos.



- (a) Quantos átomos esse conjunto de osciladores pode representar, segundo o modelo de Einstein para um sólido, e por quê?
De acordo com o modelo de Einstein, cada átomo tem associado um oscilador harmônico quântico para cada direção espacial (cada eixo de um sistema de coordenadas ortogonais). Logo, A átomos no modelo de Einstein correspondem a $N = 3A$ osciladores harmônicos quânticos. O conjunto de osciladores quânticos acima representa, portanto, um único átomo no modelo de Einstein.
- (b) Se a frequência natural dos osciladores é ω_0 , qual é o número de quanta de energia contidos nesse sistema, e qual é a energia total?
O macroestado associado ao microestado representado na figura acima é de 4 quanta distribuídos em 3 osciladores (o “traço” mais baixo corresponde ao estado quântico de menor energia, a partir do qual se conta o número de quanta em um oscilador). Como cada quantum de energia é dado por $\hbar\omega_0$, a energia total é $E_{\text{tot}} = 4\hbar\omega_0$.
- (c) Quantos microestados poderia conter o macroestado correspondente a essa mesma energia e a esse mesmo número de osciladores?

O número de microestados correspondente a quatro quanta de energia distribuídos em três osciladores é dado por

$$\Omega = \frac{(q + N - 1)!}{q!(n - 1)!} = \frac{(4 + 3 - 1)!}{4!(3 - 1)!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4!2!} = 3 \times 5 = 15 \text{ microestados.}$$

- (d) Considerando esse macroestado, qual é a probabilidade de encontrar toda a energia no oscilador da direita?
Toda a energia no oscilador da direita corresponde a um único microestado dentro dos 15 possíveis. Portanto, a probabilidade do sistema ser encontrado nesse microestado é igual a $\frac{1}{15}$.
- (e) Qual é a probabilidade de encontrar toda a energia concentrada em somente um dos três osciladores, não importa qual?

Como a probabilidade de encontrar toda a energia em apenas um oscilador específico é igual a $\frac{1}{15}$ (mesmo raciocínio do item anterior), a probabilidade de encontrar toda a energia em apenas um oscilador não especificado é igual à soma, sobre todos os osciladores do sistema, da probabilidade de que toda a energia esteja apenas no oscilador especificado na soma. Como no sistema há 3 osciladores, temos que a probabilidade de encontrar toda a energia em apenas um oscilador, não importa qual, é dada por $\frac{3}{15} = \frac{1}{5}$.

- (f) Suponhamos que no instante inicial o sistema seja produzido com toda a energia concentrada no oscilador mais à direita. Depois de passado algum tempo, os osciladores interagem, e a energia se distribui aleatoriamente entre os 3 osciladores. Qual seria, em termos da constante de Boltzmann k_B , a variação da entropia do sistema nesse processo?

Como o sistema é caracterizado pelo macroestado de 3 osciladores e 4 quanta, temos que sua entropia, com os 4 quanta distribuídos aleatoriamente, é dada por $S_f = k_B \ln(\Omega_f) = k_B \ln(15)$, sendo Ω_f o número de microestados obtido no item (c), e corresponde à configuração final deste item (f).

Observe que estamos falando da entropia do sistema definido por 4 quanta distribuídos em 3 osciladores, que é bem diferente de dois sistemas colocados em contato térmico (por exemplo, sistema A com 1 oscilador e sistema B com 2 osciladores).

Com relação à configuração inicial, toda a energia concentrada no oscilador mais à direita corresponde a apenas um único microestado, portanto, a entropia correspondente é dada por $S_i = k_B \ln(\Omega_i) = k_B \ln(1) = 0$.

Portanto, a variação de entropia do sistema é dada por $\Delta S = S_f - S_i = k_B \ln(15)$.

5. [3 pontos] Um sólido de Einstein no macroestado que contém q_1 quanta (de energia $\hbar\omega_0$) tem um número grande Ω_1 de microestados possíveis. Ao acrescentar 1 quantum de energia a esse sólido, o número de microestados aumenta para Ω_2 . Suponha conhecida a constante de Boltzmann k_B e o número N de átomos no sólido.

- (a) Estime a temperatura desse sólido em termos de Ω_1 e Ω_2 .

Como estamos assumindo que Ω_1 e Ω_2 sejam números muito grandes, é razoável supor que a temperatura do sistema, ao receber um quantum de energia, se mantenha aproximadamente constante. Portanto, a temperatura do sólido pode ser estimada como sendo dada por

$$\frac{1}{T} = \frac{dS}{dE} \approx \frac{\Delta S}{\Delta E} = \frac{k_B [\ln(\Omega_2) - \ln(\Omega_1)]}{\hbar\omega_0} = \frac{k_B \ln(\Omega_2/\Omega_1)}{\hbar\omega_0} \Rightarrow T \approx \frac{\hbar\omega_0}{k_B \ln(\Omega_2/\Omega_1)}.$$

Obs: rigorosamente, na conta acima estaríamos calculando a temperatura na energia correspondente a q_1 mais meio quanta de energia. Porém, a mecânica quântica impede a existência de energias com frações de um quantum. Por isso, o enunciado pede uma estimativa da temperatura do sólido.

- (b) Suponhamos que, na faixa de temperatura de T_1 até $2T_1$, o calor específico do sólido (medido por átomo) seja aproximadamente constante e igual a $3k_B$. Se o sólido, inicialmente à temperatura T_1 , for posto em contato térmico com um segundo sólido idêntico, mas à temperatura $2T_1$, o que acontecerá? Qual será a temperatura de equilíbrio, supondo que os dois sólidos formem um sistema isolado?

Sendo os dois sólidos idênticos e com calor específico por átomo constante entre T_1 e $2T_1$ e igual a $c_{at} = 3k_B$, temos que a capacidade térmica de cada um deles será $C = Nc_{at} = 3Nk_B$. Sendo o sistema (isolado termicamente) composto pelos dois sólidos temos, pelo princípio da energia,

$$\Delta E_{sist} = C(T_f - T_1) + C(T_f - 2T_1) = 0 \Rightarrow C(2T_f - T_1 - 2T_1) = 0 \Rightarrow T_f = \frac{3}{2}T_1.$$

- (c) Qual será a variação de entropia do sistema dos dois sólidos até que seja atingido o equilíbrio?

Como não temos informações suficientes sobre o número de quanta, tamanho de cada sólido, e/ou o número de microestados nessas temperaturas, não é possível calcular a variação de entropia através de $S = k_B \ln(\Omega)$. Porém, como temos informações sobre as temperaturas inicial e final, podemos utilizar, conforme visto em aula,

$$\frac{1}{T} = \frac{dS}{dE} \Rightarrow dS = \frac{dE}{T} \Rightarrow \Delta S = \int_{S_i}^{S_f} ds = \int_{T_i}^{T_f} \frac{dE}{T} = \int_{T_i}^{T_f} \frac{CdT}{T} = C [\ln T]_{T_i}^{T_f} = C \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right).$$

Sendo assim temos, para o primeiro sólido (A), segundo sólido (B) e o sistema dos dois sólidos (A+B),

$$\Delta S_A = C \ln \left(\frac{T_f}{T_1} \right) = C \ln \left(\frac{3}{2} \right), \quad \Delta S_B = C \ln \left(\frac{T_f}{2T_1} \right) = C \ln \left(\frac{3}{4} \right), \quad \Delta S_{A+B} = \Delta S_A + \Delta S_B = C \ln \left(\frac{3}{2} \times \frac{3}{4} \right) = C \ln \left(\frac{9}{8} \right).$$

- (d) Esse processo seria reversível ou irreversível? Por quê?

Da função logaritmo, sabemos que $\ln(x) > 0$ se $x > 1$ e $\ln(x) < 0$ se $x < 1$. Do item anterior, constatamos que $\Delta S_A > 0$, $\Delta S_B < 0$ e que $\Delta S_{A+B} > 0$. O princípio da entropia nos diz que a variação da entropia de um sistema isolado só pode ser ou igual a zero (processos reversíveis) ou maior que zero (processos irreversíveis). Portanto, o processo dos dois sólidos idênticos, inicialmente a temperaturas diferentes, colocados em contato térmico até atingir o equilíbrio, seria irreversível.

- (e) Se um desses sólidos for imerso em uma enorme piscina de hélio líquido e resfriado até o equilíbrio, a uma temperatura $T \ll T^* = \hbar\omega_0/k_B$, o que acontecerá com a capacidade térmica do sólido? Vai aumentar, diminuir, ou permanecer igual? Por quê?

Uma das características do modelo de sólido de Einstein é que esse modelo prevê o comportamento qualitativo da capacidade térmica por átomo observada empiricamente nos sólidos a baixas temperaturas, conforme visto em aula. Para temperaturas $T \ll T^* = \hbar\omega_0/k_B$ a capacidade térmica por átomo dos sólidos diminui, tendendo a zero conforme T vai para zero.

- (f) Qual será a distribuição de energia $P(E)$ esperada para o sólido após atingido o equilíbrio térmico com a piscina de hélio líquido, supondo conhecida a distribuição de microestados $\Omega(E)$ do sólido? Escolha e justifique. (Nas expressões abaixo, A e Ω_{tot} são constantes apropriadamente escolhidas.)

i. () $P(E) = Ae^{-\frac{E}{k_B T}}$

ii. () $P(E) = \frac{A}{\Omega(E)} e^{-\frac{E}{k_B T}}$

iii. (X) $P(E) = A\Omega(E)e^{-\frac{E}{k_B T}}$

iv. () $P(E) = \frac{\Omega(E)}{\Omega_{\text{tot}}}$

Vimos que o item iii é o que foi derivado em sala de aula e nos leva à distribuição de Boltzmann, onde $\Omega(E)$ é o número de estados degenerados (ou seja, o número de microestados compatíveis com o macroestado de energia E), $e^{-\frac{E}{k_B T}}$ é o fator de Boltzmann, e A é uma constante de normalização, determinada a partir da condição $\int_0^\infty P(E)dE = 1$.

O item i está errado, pois corresponde à probabilidade de apenas um único microestado com energia E , sem levar em conta os outros microestados com a mesma energia (degenerados). O item ii está errado, pois considera de maneira incorreta o número de estados degenerados. Por fim, o item iv está errado pois não leva em conta o número de microestados do reservatório, que é o termo que dá origem ao fator de Boltzmann.

Justificativa matemática (também válida, porém, não é a única possível, muito menos, necessária):

$$P(E) = \frac{\Omega(E)\Omega_{\text{res}}(E_{\text{res}})}{\Omega_{\text{tot}}} = \frac{\Omega(E)\Omega_{\text{res}}(E_{\text{tot}} - E)}{\Omega_{\text{tot}}},$$

onde $\Omega(E)$ é o número de microestados no sólido com energia E , $\Omega_{\text{res}}(E_{\text{res}})$ é o número de microestados na piscina de hélio líquido (reservatório), com energia $E_{\text{res}} = E_{\text{tot}} - E$, e $\Omega_{\text{tot}}(E_{\text{tot}})$ é o número de microestados no sistema sólido+piscina, com energia total E_{tot} . Como $E \ll E_{\text{res}}$, podemos fazer uma expansão em série de Taylor para a função $k_B \ln [\Omega_{\text{res}}(E_{\text{res}})]$,

$$k_B \ln [\Omega_{\text{res}}(E_{\text{tot}} - E)] \approx k_B \ln [\Omega_{\text{res}}(E_{\text{tot}})] - E \times \frac{d}{dE} k_B \ln [\Omega_{\text{res}}(E_{\text{tot}})] = S_{\text{res}}(E_{\text{tot}}) - E \times \frac{dS_{\text{res}}(E_{\text{tot}})}{dE} \simeq S_{\text{res}}(E_{\text{tot}}) - \frac{E}{T}$$

$$\ln [\Omega_{\text{res}}(E_{\text{tot}} - E)] \approx \frac{S_{\text{res}}(E_{\text{tot}})}{k_B} - \frac{E}{k_B T} = \ln [\Omega_{\text{res}}(E_{\text{tot}})] - \frac{E}{k_B T} \quad \Rightarrow \quad \Omega_{\text{res}}(E_{\text{res}}) \approx \Omega_{\text{res}}(E_{\text{tot}}) e^{-\frac{E}{k_B T}}$$

$$P(E) \approx \frac{\Omega_{\text{res}}(E_{\text{tot}})}{\Omega_{\text{tot}}(E_{\text{tot}})} \Omega(E) e^{-\frac{E}{k_B T}} \quad \Rightarrow \quad P(E) = A\Omega(E) e^{-\frac{E}{k_B T}},$$

em que utilizamos o fato de tanto $\Omega_{\text{res}}(E_{\text{tot}})$ e $\Omega_{\text{tot}}(E_{\text{tot}})$ serem constantes, independentes de E .