Segunda Lista de Exercícios de Física Matemática I

(Séries de Fourier)

IFUSP - Março 2015

Exercício 1 ***(i)*** *Calcule a série de Fourier da função*

$$f(x) = \exp\left\{\frac{x}{2\pi}\right\} \ ,$$

em $-\pi \leq x < \pi$*, periódica de período fundamental* $T = 2\pi$*. A série de Fourier* $Sf(x) = \lim_{n\to\infty} S_n f(x)$*,*

$$\begin{aligned} S_n f(x) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k \ e^{ikx} \\ c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \ e^{-ikx} \ dx \end{aligned}$$

de f *em* x*, de acordo com o Teorema de Fourier,*[1] *converge para (a média do salto de* f *em* x*)*

$$Sf(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

onde $f(x \pm 0)$ *denota o valor da função* $f(y)$ *quando* y *se aproxima de* x *pela direita (resp. esquerda). Em particular,* $Sf(x) = \lim_{n\to\infty} S_n f(x) = f(x)$ *em todos os pontos* x *de continuidade de* f*.* ***(ii)*** *Calcule a série de Fourier no ponto* $x = \pi$ *e mostre*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 4\pi^2 n^2} = \frac{1}{4} \ \frac{3-e}{e-1} \ (\simeq 0.040988) \ .$$

(iii) *Calcule a série de Fourier no ponto* $x = 0$ *e mostre*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + 4\pi^2 n^2} = \frac{1}{2} \ \frac{\sqrt{e} - e + 1}{e-1} \ \ (\simeq -0.020241) \ .$$

Exercício 2 *Desenvolva a função*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0 \leq t < h \\ 0 & \text{se} \quad h < t < 2\pi \end{cases} \ ,$$

onde $h \in (0, 2\pi)$ *é uma constante, em uma série de Fourier na forma complexa no intervalo* $[0, 2\pi)$*. Mostre que é possível escrever a série em termos de funções e coeficientes reais*

$$Sf(t) = \frac{h}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left\{\sin[n(h-t)] + \sin(nt)\right\} \ .$$

[1] É preciso assumir certas condições sobre f, satisfeitas para este exemplo.