Primeira Lista de Exerc ́ıcios de F ́ısica Matemática I – Soluç ̃oes (Equaç ̃ao a Derivadas Parciais de Laplace e Problemas de Valor de Fronteira) IFUSP - 9 Setembro 2015

Exerc ́ıcio 1 Os autovalores e autofunç ̃oes correspondentes do problemas de valor de fronteira s ̃ao:

1. A soluç ̃ao geral de X + λ2X = 0

X(x) = Acosλx + B sinλx (1)

em (0,L) com

X(0) = A = 0

X (L) = λcosλL = 0

resulta em λ

n

= (n − 1/2)π/L, n = 1,2,... (semi–inteiros múltiplos de π/L), e

X

n

= sin

(2n 2L

− 1)π

x .

2. A soluç ̃ao geral (1) de X + λ2X = 0 em (−π,π) sujeita a

X(π) − X(−π) = 2B sinλπ = 0

X (π) − X (−π) = −2λAsinλπ = 0

resulta em: para λ = 0 temos X

0

= 1 e para cada λ

n

= n, n = 1,2,..., temos duas autofunç ̃oes L.I. correspondentes

X(par)

n

(x) = cosnx (B = 0)

X(impar)

n

(x) = sinnx (A = 0) .

3. A soluç ̃ao geral (1) de X + λ2X = 0 em (0,1) satisfazendo

X(0) = A = 0

X (1) + hX(1) = B (λcosλ + hsinλ)=0

resulta em uma equaç ̃ao transcendental para os autovalores

cotλ = −

h λ cuja soluç ̃ao gráfica é dada pela intersecç ̃ao das curvas cotλ e as hipérboles −h/λ (h = 1 na figura). Se λ

n

, n = 1,2,..., enumera os autovalores positivos em ordem crescente:

λ

1

< λ

2

< ··· < λ

n

< ··· ,

temos (numéricamente) λ

1

= 2.0287578, λ

2

= 4.9131804, λ

3

= 7.9786657, λ

4

= 11.0855384, λ

5

= 14.2074367 e λ

n

∼ (n − 1/2)π assintóticamente quando n tende a ∞. A n–ésima autofunç ̃oes correspondentes a λ

n

é

X

n

(x) = sinλ

n

x.

1

1 cot Λ ,

Λ

2

1

Figure 1: As coordenadas dos pontos de intesecç ̃ao das curvas cotλ e −1/λ, s ̃ao os autovalores do problema de fronteira do ́ıtem 3 com h = 1

2 15 10 5 5 10 15

Λ

1

2

−u Exerc ́ıcio 2 Considere a equaç ̃ao do calor u

t

xx

= 0 em R = {(t, x) : t > 0, 0 <x<π} sujeita `as condiç ̃oes u

x

(t,0) = u

x

(t, π)=0, t > 0 e u(0,x) = f(x), 0 ≤ x ≤ π, com

f(x) =

a

0 2

∞∑

n=1

cosnx .

1. As funç ̃oes u

0

+

a

n

(t, x)=1 e u

n

(t, x) = e−n2t cosnx, n = 1, 2, ..., satisfazem

(u

0

= 0 , em R

e (u

0

)

t

= (u

0

)

xx )

x

(t, x) ≡ 0 garante as condiç ̃oes nas fronteiras x = 0 e x = π; para todo n ∈ N ,

(u

n

)

xx

= −n2u

n

= (u

n

)

t

, em R ,

e

(u

n

(t,0) = 0

(u

n

)

x

)

x

(t, π) = −ne−n2t sinnπ = 0 ,

identicamente para t ≥ 0, concluindo a verificaç ̃ao destas como soluç ̃oes das equaç ̃oes ho- mogêneas (eq. do calor e cond. de fronteira).

2. Por linearidade das operaç ̃oes diferenciais e ́ıtem 1, a combinaç ̃ao linear

u(t, x) =

a 2

0

∞∑

(t, x),

n=1 satisfaz, sem se preocupar com quest ̃oes sobre a convergência da série e supondo leg ́ıtima a derivaç ̃ao termo a termo, a equaç ̃ao do calor

u

xx

u

0

(t, x) +

a

n

u

n

=

a 2

0

(u

0

)

xx

+

∞∑

n=1

a

n

(u

n

)

xx

= −

∞∑

n=1

n2a

n

u

n

=

a

0 2

∞∑

n=1

,

em R e condiç ̃oes de fronteira

u

x

(u

0

)

t

+

a

n

(u

n

)

t

= u

t

a

0 2

∞∑

(t,0) = 0 ,

n=1

u

x

(t,0) =

(u

0

)

x

(t,0) +

a

n

(u

n

)

x

(0,π) =

a 2

0

(u

0

)

x

(t, π) +

∞∑

n=1

a

n

(u

n

)

x

(t, π)=0 , t > 0 .

Em particular, u(t, x) satisfaz em t = 0,

u(0,x) =

a

0 2

+

∞∑

a

n

cosnx = f(x) .

n=1

3

3. O método de Fourier de separaç ̃ao de variaveis consiste em procurar soluç ̃oes das equaç ̃oes

homogêneas u

t

− u

xx

= 0 e u

x

(t,0) = u

x

(t, π)=0 na forma produto

u(t, x) = T(t) X(x) . (2)

Substituindo na equaç ̃ao do calor, obtemos

X

X

=

T T

= σ = −λ2

com λ real, e a equaç ̃ao `a derivadas parciais (juntamente com as condiç ̃oes de fronteira) é reduzida a um par de equaç ̃oes diferenciais ordinárias:

X + λ2X = 0 , 0 <x<π (3)

com X (0) = X (π)=0 e

T + λ2T = 0 . (4)

Resolvemos primeiramente o problema de autovalores: encontrar todas as soluç ̃oes da equaç ̃ao (3) sujeita as condiç ̃oes nas duas extremidades do intervalo (0,π). A soluç ̃ao geral de (3)

X(x) = Acosλx + B sinλx

juntamente com

X (0) = λB = 0

X (π) = λAsinλπ = 0

determinam os pares de autovalores/autofunç ̃oes do problema:1 para λ = 0 temos X

0

(x)=1 e para λ = n ∈ N temos X

n

(x) = cosnx. A soluç ̃ao geral da equaç ̃ao (4) é

T(t) = Ce−λ2t

e o produto (2) reproduz, tomando a constante C = 1, a coleç ̃ao de soluç ̃oes das equaç ̃oes homogêneas sugerida no ́ıtem 1:

u

0

(t, x) = 1

u

n

(t, x) = e−n2t cosnx , n = 1,2,...

A resoluç ̃ao das equaç ̃oes em

R ̄

= {(t, x) : t ≥ 0, 0 ≤ x ≤ π}, incluindo a condiç ̃ao n ̃ao homogênea em t = 0, segue do ́ıtem 2.

1Como as equaç ̃oes s ̃ao homogêneas, as autofunç ̃oes s ̃ao determinadas a menos de uma constante multiplicativa, a qual fixamos, por simplicidade, igual a 1.

4