

Primeira Lista de Exercícios de Física Matemática I – Soluções
(Equação a Derivadas Parciais de Laplace e Problemas de Valor de Fronteira)
IFUSP - 9 Setembro 2015

Exercício 1 *Os autovalores e autofunções correspondentes do problemas de valor de fronteira são:*

1. A solução geral de $X'' + \lambda^2 X = 0$

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x \quad (1)$$

em $(0, L)$ com

$$X(0) = A = 0$$

$$X'(L) = \lambda \cos \lambda L = 0$$

resulta em $\lambda_n = (n - 1/2) \pi / L$, $n = 1, 2, \dots$ (semi-inteiros múltiplos de π / L), e

$$X_n = \sin \frac{(2n - 1)\pi}{2L} x .$$

2. A solução geral (1) de $X'' + \lambda^2 X = 0$ em $(-\pi, \pi)$ sujeita a

$$X(\pi) - X(-\pi) = 2B \sin \lambda \pi = 0$$

$$X'(\pi) - X'(-\pi) = -2\lambda A \sin \lambda \pi = 0$$

resulta em: para $\lambda = 0$ temos $X_0 = 1$ e para cada $\lambda_n = n$, $n = 1, 2, \dots$, temos duas autofunções L.I. correspondentes

$$X_n^{(\text{par})}(x) = \cos nx \quad (B = 0)$$

$$X_n^{(\text{impar})}(x) = \sin nx \quad (A = 0) .$$

3. A solução geral (1) de $X'' + \lambda^2 X = 0$ em $(0, 1)$ satisfazendo

$$X(0) = A = 0$$

$$X'(1) + hX(1) = B(\lambda \cos \lambda + h \sin \lambda) = 0$$

resulta em uma equação transcendental para os autovalores

$$\cot \lambda = -\frac{h}{\lambda}$$

cuja solução gráfica é dada pela intersecção das curvas $\cot \lambda$ e as hipérboles $-h/\lambda$ ($h = 1$ na figura). Se λ_n , $n = 1, 2, \dots$, enumera os autovalores positivos em ordem crescente:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots ,$$

temos (numéricamente) $\lambda_1 = 2.0287578$, $\lambda_2 = 4.9131804$, $\lambda_3 = 7.9786657$, $\lambda_4 = 11.0855384$, $\lambda_5 = 14.2074367$ e $\lambda_n \sim (n - 1/2)\pi$ assintoticamente quando n tende a ∞ . A n -ésima autofunções correspondentes a λ_n é

$$X_n(x) = \sin \lambda_n x .$$

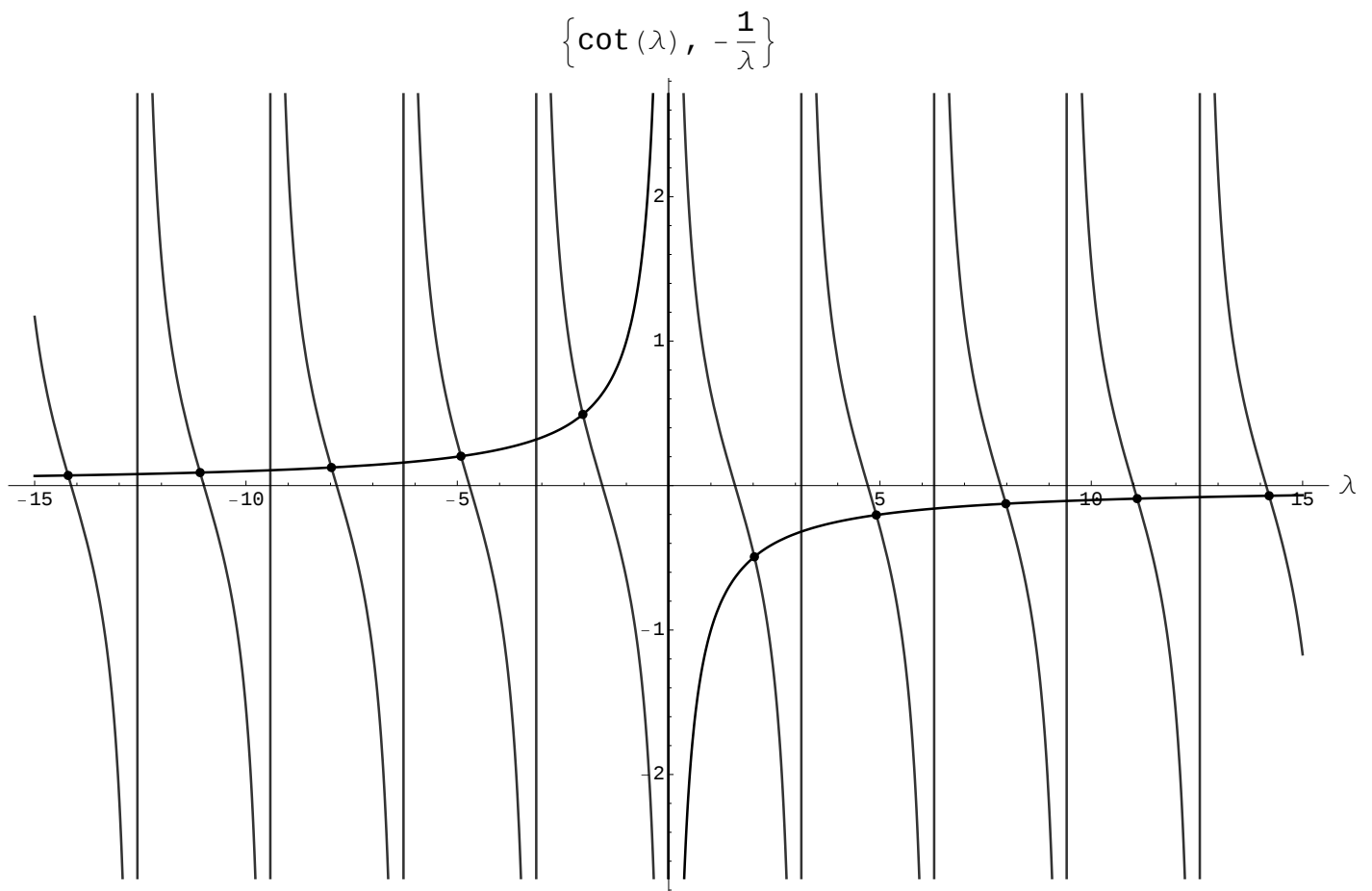


Figure 1: As coordenadas dos pontos de inteseccção das curvas $\cot \lambda$ e $-1/\lambda$, são os autovalores do problema de fronteira do ítem 3 com $h = 1$

Exercício 2 Considere a equação do calor $u_t - u_{xx} = 0$ em $R = \{(t, x) : t > 0, 0 < x < \pi\}$ sujeita às condições $u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0$, $t > 0$ e $u(0, x) = f(x)$, $0 \leq x \leq \pi$, com

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx .$$

1. As funções $u_0(t, x) = 1$ e $u_n(t, x) = e^{-n^2 t} \cos nx$, $n = 1, 2, \dots$, satisfazem

$$(u_0)_t = (u_0)_{xx} = 0 , \quad \text{em } R$$

e $(u_0)_x(t, x) \equiv 0$ garante as condições nas fronteiras $x = 0$ e $x = \pi$; para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$(u_n)_{xx} = -n^2 u_n = (u_n)_t , \quad \text{em } R ,$$

e

$$(u_n)_x(t, 0) = 0$$

$$(u_n)_x(t, \pi) = -ne^{-n^2 t} \sin n\pi = 0 ,$$

identicamente para $t \geq 0$, concluindo a verificação destas como soluções das equações homogêneas (eq. do calor e cond. de fronteira).

2. Por linearidade das operações diferenciais e item 1, a combinação linear

$$u(t, x) = \frac{a_0}{2} u_0(t, x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(t, x),$$

satisfaz, sem se preocupar com questões sobre a convergência da série e supondo legítima a derivação termo a termo, a equação do calor

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{a_0}{2} (u_0)_{xx} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (u_n)_{xx} \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n u_n \\ &= \frac{a_0}{2} (u_0)_t + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (u_n)_t = u_t , \end{aligned}$$

em R e condições de fronteira

$$u_x(t, 0) = \frac{a_0}{2} (u_0)_x(t, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (u_n)_x(t, 0) = 0 ,$$

$$u_x(0, \pi) = \frac{a_0}{2} (u_0)_x(t, \pi) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (u_n)_x(t, \pi) = 0 , \quad t > 0 .$$

Em particular, $u(t, x)$ satisfaz em $t = 0$,

$$u(0, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = f(x) .$$

3. O método de Fourier de separação de variáveis consiste em procurar soluções das equações homogêneas $u_t - u_{xx} = 0$ e $u_x(t, 0) = u_x(t, \pi) = 0$ na forma produto

$$u(t, x) = T(t) X(x) . \quad (2)$$

Substituindo na equação do calor, obtemos

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{T} = \sigma = -\lambda^2$$

com λ real, e a equação à derivadas parciais (juntamente com as condições de fronteira) é reduzida a um par de equações diferenciais ordinárias:

$$X'' + \lambda^2 X = 0 , \quad 0 < x < \pi \quad (3)$$

com $X'(0) = X'(\pi) = 0$ e

$$T' + \lambda^2 T = 0 . \quad (4)$$

Resolvemos primeiramente o problema de autovalores: encontrar todas as soluções da equação (3) sujeita as condições nas duas extremidades do intervalo $(0, \pi)$. A solução geral de (3)

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$$

juntamente com

$$X'(0) = \lambda B = 0$$

$$X'(\pi) = \lambda A \sin \lambda \pi = 0$$

determinam os pares de autovalores/autofunções do problema:¹ para $\lambda = 0$ temos $X_0(x) = 1$ e para $\lambda = n \in \mathbb{N}$ temos $X_n(x) = \cos nx$. A solução geral da equação (4) é

$$T(t) = C e^{-\lambda^2 t}$$

e o produto (2) reproduz, tomando a constante $C = 1$, a coleção de soluções das equações homogêneas sugerida no item 1:

$$u_0(t, x) = 1$$

$$u_n(t, x) = e^{-n^2 t} \cos nx , \quad n = 1, 2, \dots$$

A resolução das equações em $\bar{R} = \{(t, x) : t \geq 0, 0 \leq x \leq \pi\}$, incluindo a condição não homogênea em $t = 0$, segue do item 2.

¹Como as equações são homogêneas, as autofunções são determinadas a menos de uma constante multiplicativa, a qual fixamos, por simplicidade, igual a 1.