

Segunda Lista de Exercícios de Física Matemática I – Soluções

(Série de Fourier)

IFUSP - 9 Setembro 2015

Exercício 1 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função 2π -periódica tal que

$$f(x) = \cos \alpha x, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (1)$$

no intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$.

(i) A série de Fourier

$$Sf(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (2)$$

de $f(x)$ é uma série trigonométrica cujo n -ésimo coeficiente,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad (3)$$

n um inteiro qualquer, está definido pois, qualquer que seja α , $\cos \alpha x$ é integrável e absolutamente integrável em $[-\pi, \pi]$. Substituindo

$$f(x) = \cos \alpha x = \frac{1}{2} (e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x})$$

na integral (3), com $n \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{i\alpha x} + e^{-i\alpha x}) e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\alpha-n)x} dx + \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(\alpha+n)x} dx \right) \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{i(\alpha-n)} (e^{i(\alpha-n)\pi} - e^{-i(\alpha-n)\pi}) + \frac{1}{-i(\alpha+n)} (e^{-i(\alpha+n)\pi} - e^{i(\alpha+n)\pi}) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{(\alpha-n)} \sin(\alpha-n)\pi + \frac{1}{(\alpha+n)} \sin(\alpha+n)\pi \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{(\alpha-n)} + \frac{1}{(\alpha+n)} \right) \sin \alpha \pi \cos n\pi \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 - n^2} \sin \alpha \pi \cos n\pi \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 - n^2} \sin \alpha \pi. \end{aligned}$$

onde na quinta igualdade usamos

$$\sin(\alpha \pm n)\pi = \sin \alpha \pi \cos n\pi \pm \cos \alpha \pi \sin n\pi = \sin \alpha \pi \cos n\pi.$$

Para $n = 0$,

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha x \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos \alpha x \, dx \\ &= \frac{1}{\pi \alpha} \sin \alpha \pi . \end{aligned}$$

(ii) Substituindo os c_n 's em (2), separando os termos da soma com $n = 0$, $n > 0$ e $n < 0$, a série de Fourier $Sf(x)$ de $f(x)$ pode ser escrita como uma série trigonométrica real

$$\begin{aligned} Sf(x) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) \\ &= \frac{1}{\pi \alpha} \sin \alpha \pi + \frac{2\alpha}{\pi} \sin \alpha \pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\alpha^2 - n^2} \cos nx . \end{aligned} \quad (4)$$

Note que, devido a $f(x)$ ser par, os coeficientes c_n tem a mesma paridade: $c_{-n} = c_n$ (veja Complemento 1 em <http://www.fig.if.usp.br/~marchett/fismat1>, Notas de Aula).

Exercício 2 (i) Podemos concluir da periodicidade e paridade de $f(x)$ que a série de Fourier $Sf(x)$ de $f(x)$ é uma função 2π -periódica e par. Com base neste fato, evidente pela expansão (4), vamos mostrar (por contradição) que nos pontos extremos $\pm\pi$ do intervalo $[-\pi, \pi]$, $Sf(x)$ é contínua.

Suponhamos que $Sf(x)$ seja descontínua em $x = \pi$, isto é, $Sf(\pi+0) \neq Sf(\pi-0)$. Então, pela periodicidade de $Sf(x)$, $Sf(\pi+0) = Sf(-\pi+0)$ e, pela hipótese de descontinuidade, $Sf(-\pi+0) \neq Sf(\pi-0)$, em contradição com sua paridade: $Sf(-x) = Sf(x)$ em $x = \pi-0$.

(ii) Supondo que $Sf(x)$ convirja para $f(x)$, tomando $x = \pi$ na igualdade $f(x) = Sf(x)$, temos

$$\cos \alpha \pi = \frac{1}{\pi \alpha} \sin \alpha \pi + \frac{2\alpha}{\pi} \sin \alpha \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^2 - n^2}$$

onde usamos $\cos^2 n\pi = (-1)^{2n} = 1$. Para $\alpha \notin \mathbb{Z}$, $\sin \alpha \pi \neq 0$ e podemos dividir a igualdade por esta quantidade concluindo

$$\cot \alpha \pi = \frac{1}{\pi \alpha} - \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2}$$

(iii) Fazendo $\alpha = 1/2$ na última igualdade, temos $\cot \pi/2 = \frac{\cos \pi/2}{\sin \pi/2} = 0$ e

$$0 = \frac{2}{\pi} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - (1/2)^2} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$$

de onde se conclui

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} .$$