Segunda Lista de Exercícios de Física Matemática I

(Séries de Fourier)

IFUSP - 20 de Agosto 2015

Exercício 1 ***(i)*** *Calcule a série de Fourier*

$$Sf(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{1}$$

de período fundamental $T = 2\pi$ *e cujo* n*–ésimo coeficiente,* n *um inteiro qualquer, é*

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \ ,$$

que representa a função

$$f(x) = \cos \alpha x \ , \qquad \alpha \in \mathbb{R} \tag{2}$$

no intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$*.* ***(ii)*** *Em seguida, escreva a série* $Sf(x)$ *em termos de funções trigonométricas e coeficientes reais.*

Exercício 2 *Com respeito a série de Fourier (1),* ***(i)*** *dado que* $Sf(x)$ *é uma função* 2π*–periódica e* $f(x)$ *em (2) é par, o que se pode concluir da representação* $Sf(x)$ *de* $f(x)$ *em* $x = \pi$*, é contínua?* ***(ii)*** *Supondo que a sequência de polinômios trigonométricos*

$$S_n f(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \ e^{ikx}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \ e^{-ikx} \ dx$$

convirja para f *em* $[-\pi, \pi]$ *(veja comentário a seguir), mostre tomando* $x = \pi$ *na igualdade* $f(x) = Sf(x)$ *que*

$$\cot \alpha\pi = \frac{1}{\pi\alpha} - \frac{2\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} \ , \tag{3}$$

para todo α *não inteiro.* ***(iii)*** *Deduza a partir de (3) a relação*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} \ .$$

Comentário. Pode-se mostrar, aplicando o teste M de Weierstrass, que a seqüência $S_n f(x)$ de séries parciais de Fourier de (2) converge uniformemente para $Sf(x)$. A convergência, contudo, não estabelece que a séries de Fourier $Sf(x)$ de $f(x)$ converge para $f(x)$.