

Terceira Lista de Exercícios de Física Matemática I – Soluções

(Séries de Fourier e Problema de Valor Inicial e de Fronteira)

IFUSP - 28 Setembro 2015

Exercício 1 1. Vamos calcular a série de Fourier $Sh(x)$ da função $h(x) = -x/2$ em $(0, \pi]$, ímpar, 2π -periódica. Os coeficientes de Fourier ímpar de h são

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{-x}{2} \sin nx dx \\ &= \frac{-1}{\pi n} \left(-x \cos nx \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos nx dx \right) \\ &= \frac{1}{n} \cos n\pi \end{aligned}$$

para $n \geq 1$, por integração por partes, e a série de Fourier de h é, portanto,

$$\begin{aligned} Sh(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx . \end{aligned}$$

A igualdade

$$\frac{-x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx , \quad x \in (0, \pi] \quad (1)$$

é estabelecida pelo Teorema de Fourier.

2. Integrando a igualdade termo a termo

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_0^x \frac{-x}{2} dx = -\frac{x^2}{4} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \int_0^x \sin nx dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} (1 - \cos nx) = SH(x) \end{aligned} \quad (2)$$

em $(0, \pi]$ é uma função par, 2π -periódica. A igualdade $H(x) = SH(x)$ segue do Teorema sobre integração de séries de Fourier, aplicável às funções seccionalmente contínuas. Como

$$SH(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx , \quad (3)$$

onde $A_n = (-1)^{n+1}/n^2$ e

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{-x^2}{4} dx \\ &= \frac{-2}{\pi} \frac{x^3}{12} \Big|_0^\pi = \frac{-\pi^2}{6}, \end{aligned}$$

concluimos, por comparação de (2) e (3),

$$f(x) = \frac{1}{4} \left(x^2 - \frac{\pi^2}{3} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \quad (4)$$

em $[0, \pi)$ é par e 2π -periódica.

3. Fazendo $x = \pi$ em (4), juntamente com $(-1)^n \cos n\pi = \cos^2 n\pi = 1$, temos

$$f(\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

4. Aplicando o Teorema sobre integração de séries de Fourier, temos

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_0^x \left(H(y) - \frac{A_0}{2} \right) dy \\ &= \frac{1}{4} \int_0^x \left(-y^2 + \frac{\pi^2}{3} \right) dy \\ &= -\frac{1}{12} (x^3 - \pi^2 x) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx. \end{aligned}$$

Integrando esta série termo a termo mais uma vez, obtemos a função

$$\begin{aligned} F(x) &= -\frac{1}{12} \int_0^x (y^3 - \pi^2 y) dy \\ &= -\frac{1}{24} \left(\frac{x^4}{2} - \pi^2 x^2 \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} (\cos nx - 1) = SF(x) \end{aligned} \quad (5)$$

em $[0, \pi)$, par e 2π -periódica. Consequentemente,

$$SF(x) = \frac{\tilde{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n \cos nx \quad (6)$$

com $\tilde{A}_n = (-1)^n/n^4$, $n \geq 1$, e

$$\tilde{A}_0 = \frac{-1}{12\pi} \int_0^\pi \left(\frac{x^4}{2} - \pi^2 x^2 \right) dx = \frac{-\pi^4}{12} \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{3} \right) = \frac{7\pi^4}{360} .$$

Comparando (6) e (5), temos

$$-\frac{1}{24} \left(\frac{x^4}{2} - \pi^2 x^2 \right) = \frac{7\pi^4}{720} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} \cos nx$$

de onde se conclui, fazendo $x = \pi$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = F(\pi) - \frac{7\pi^4}{720} = \frac{\pi^4}{48} \left(1 - \frac{7}{15} \right) = \frac{\pi^4}{90} .$$

5. Aplicando a identidade de Parseval para a função f em (4), temos

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x)^2 dx &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{16} \left(x^2 - \frac{\pi^2}{3} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_0^\pi \left(x^4 - \frac{2\pi^2}{3} x^2 + \frac{\pi^4}{9} \right) dx \\ &= \frac{\pi^4}{8} \left(\frac{1}{5} - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} \right) \\ &= \frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \end{aligned}$$

verificando a relação obtida no ítem 4..

Exercício 2 Considere a equação para a condução do calor em uma barra de comprimento unitário:

$$\frac{1}{\kappa} u_t - u_{xx} = 0 \tag{7}$$

em $R = \{(t, x) : t > 0, 0 < x < 1\}$ sujeita a condição de fronteira (isolante à esquerda, em contato com reservatório à temperatura nula à direita)

$$u_x(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad t > 0 \tag{8}$$

e inicial

$$u(0, x) = x^2 - 1, \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{9}$$

O método de Fourier procura soluções das equações homogêneas (7) e (8) da forma

$$u(t, x) = T(t)X(x) \tag{10}$$

resultando, ao substituir na equação (7), em um par de equações diferenciais ordinárias:

$$T' + \kappa \lambda^2 T = 0 \tag{11}$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \tag{12}$$

com $X(0) = X(1) = 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ uma constante arbitrária. A segunda equação é um problema de autovalores: encontrar os valores próprios λ^2 e auto-funções $X(x) \neq 0$ correspondentes. A solução geral de (12) é

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$$

$$X'(x) = -A\lambda \sin \lambda x + \lambda B \cos \lambda x$$

Aplicando as condições de fronteiras

$$X'(0) = \lambda B = 0$$

$$X(1) = A \cos \lambda = 0$$

encontramos os autovalores e auto-funções do problema:

$$\lambda_n = (n - 1/2)\pi$$

$$X_n(x) = \cos(n - 1/2)\pi x, \quad n = 1, 2, \dots$$

Uma solução da equação (11) é

$$T(t) = e^{-\kappa \lambda^2 t}$$

e, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n(t, x) = e^{-\kappa(n-1/2)^2 \pi^2 t} \cos(n - 1/2)\pi x$$

é uma solução de (7) e (8) da forma (10). Pelo princípio de superposição, uma solução geral das equações homogêneas (7) e (8) é uma combinação linear destas soluções:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\kappa(n-1/2)^2 \pi^2 t} \cos(n - 1/2)\pi x \quad (13)$$

onde os a_n devem ser determinados pela condição inicial

$$u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n - 1/2)\pi x = x^2 - 1, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (14)$$

Observe que o lado direito desta equação deve ser uma função, denominada $f(x)$, par e periódica de período fundamental $T = 4$. A paridade determina $f(x)$ no intervalo $(-1, 0)$ porém temos que determinar f em $(1, 2)$ também e, para isso, utilizaremos alguma simetria consistente com a condição de fronteira. Vamos refletir a função no eixo paralelo ao eixo das ordenadas em $x = 1$. Se refletíssemos simetricamente, o período da função reduziria para 2, não compatível com a solução do problema. Determinamos os coeficientes a_n refletindo f de forma antissimétrica em $x = 1$:

$$f(x) = -f(2 - x) = -(2 - x)^2 + 1, \quad 1 < x < 2.$$

Note que é compatível com a condição de fronteira $f(1) = 0$ e com o período $T = 4$. De fato, esta determinação define uma função f contínua e 4-periódica, satisfazendo (14) (veja Fig. 1).

Os coeficientes $a_n = \tilde{a}_k$ de f devem se anular para $k = 2n$ e ser diferente de zero para $k = 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$ onde

$$\begin{aligned} \tilde{a}_k &= \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) \cos k\pi x/2 \, dx \\ &= \int_0^1 (x^2 - 1) \cos k\pi x/2 \, dx - \int_1^2 f(2 - x) \cos k\pi x/2 \, dx \end{aligned}$$

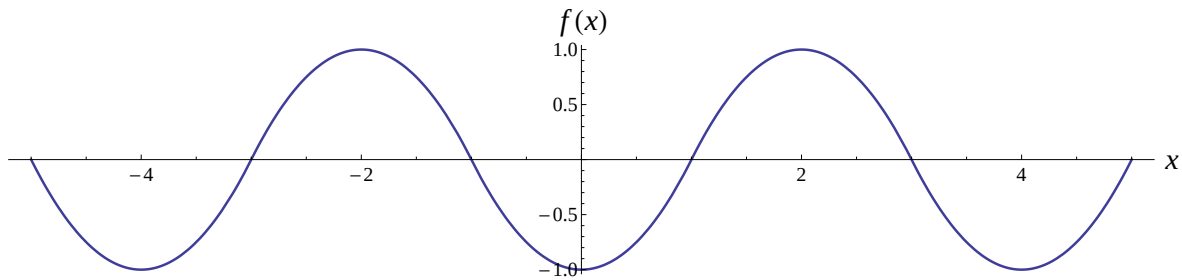


Figure 1: Função $f(x) = x^2 - 1$ se $0 < x < 1$, 4-periódica, simétrica com respeito a eixo $x = 0$ e anti-simétrica com respeito ao eixo $x = 1$

Fazendo a mudança de variável

$$y = 2 - x$$

$$dx = -dy$$

na segunda integral, juntamente com a identidade

$$\begin{aligned} \cos k\pi(2 - y)/2 &= \cos k\pi \cos k\pi y/2 + \sin k\pi \sin k\pi y/2 \\ &= (-1)^k \cos k\pi y/2 \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{a}_k &= \int_0^1 (x^2 - 1) \cos k\pi x/2 \, dx + \int_1^0 (y^2 - 1) \cos k\pi(2 - y)/2 \, dy \\ &= \left(1 - (-1)^k\right) \int_0^1 (x^2 - 1) \cos k\pi x/2 \, dx, \end{aligned}$$

de onde se conclui, tomando $k\pi x/2 = (2n - 1)\pi x/2 = (n - 1/2)\pi x$, por integração por partes,

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_0^1 (x^2 - 1) \cos(n - 1/2)\pi x \, dx \\ &= \frac{4}{(2n - 1)\pi} \left((x^2 - 1) \sin(n - 1/2)\pi x \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 x \sin(n - 1/2)\pi x \, dx \right) \\ &= \frac{-8}{(2n - 1)\pi} \int_0^1 x \sin(n - 1/2)\pi x \, dx \\ &= \frac{16}{(2n - 1)^2 \pi^2} \left(x \cos(n - 1/2)\pi x \Big|_0^1 - \int_0^1 \cos(n - 1/2)\pi x \, dx \right) \\ &= \frac{-32}{(2n - 1)^3 \pi^3} \sin(n - 1/2)\pi x \Big|_0^1 \\ &= (-1)^{n+1} \frac{32}{(2n - 1)^3 \pi^3}. \end{aligned}$$

A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ no lado direito de (14) é uma função contínua e sua série de Fourier $S_n f(x)$ converge uniformemente para f pelo teste M de Weierstrass (a_n é somável em valor absoluto). Isso implica que a solução (13) é uniformemente convergente em $\bar{R}$ e, por conseguinte, contínua devido a continuidade de cada função $u_n(t, x)$ em $\bar{R}$.