Terceira Lista de Exercícios de Física Matemática I

(Equações Diferenciais Parciais e Séries de Fourier)

IFUSP - Setembro 2015

Exercício 1 *1. A série de Fourier*

$$Sh(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx$$

2π–periódica e impar, representa a função $h(x) = -x/2$ no intervalo $(0, \pi)$. Calcule os coeficientes de Fourier desta série a partir da função $h(x)$.

2. Integre os dois membros da igualdade acima e obtenha uma função $f(x)$ em $(0, \pi)$ tal que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \,.$$

Você pode justificar a validade da integração termo a termo?

3. Faça $x = \pi$ e mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \,.$$

4. Utilize o teorema sobre integração de séries de Fourier por mais duas vezes e mostre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \,.$$

5. Verifique este resultado por intermédio da identidade de Parseval aplicada à função $f(x)$ no ítem 2.

Exercício 2 *Determine a solução do seguinte problema de valores inicial e de fronteira pelo método de Fourier:*

$$\frac{1}{\kappa} u_t - u_{xx} = 0 \,,$$

no interior do domínio $\bar{R} = \{(t, x) : t \geq 0,\, 0 \leq x \leq 1\}$, com condição de fronteira

$$u_x(t, 0) = u(t, 1) = 0 \,,$$

para $t > 0$ e condição inicial

$$u(0, x) = x^2 - 1 \,,$$

para $0 \leq x \leq 1$.

Indicação: *Determine os coeficientes da solução em série a partir da série de Fourier em cossenos da função $x^2 - 1$ em $0 \leq x \leq 1$ e $1 - (x - 2)^2$ em $1 < x \leq 2$ com período fundamental $T = 4$.*