Quarta Lista de Exercícios de Física Matemática I – Soluções

(Equações a derivadas parciais não-homogêneas e séries de Fourier)

IFUSP - 1 Outubro 2015

Exercício 1 *Considere o problema de valores inicial e de fronteira (PVIF)*

$$\frac{1}{\kappa}\,u_t - u_{xx} = e^{-t}, \tag{1}$$

em $R = \{(t,x) : t > 0\,,\, 0 < x < \pi\}$ *com*

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0\ , \qquad t > 0 \tag{2}$$

e

$$u(0,x) = \frac{x}{2}\,(\pi - x)\ , \qquad 0 \le x \le \pi\ . \tag{3}$$

Pelo método da variação dos parâmetros, a solução o PVIF tem a forma

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\sin nx\ . \tag{4}$$

Observe que u dado por (4), onde $c_n(t) = b_n \exp\left(-n^2\kappa t\right)$ *é solução do PVIF (1) com* e^{-t} *substituído por* 0, *(2) e (3) com*

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{x}{2}\,(\pi - x)\sin nx\ dx\ , \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

o n–ésimo coeficientes de Fourier da função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π*–periódica, ímpar tal que* $f(x) = x\,(\pi - x)\,/2$ *para* $x \in [0,\pi]$. *A função f é contínua e sua derivada f′ é quadrado integrável de forma que sua série de Fourier* $Sf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ *converge uniformemente para f.*

Substituindo (4) em (1), obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\kappa}\dot{c}_n(t) - n^2 c_n(t)\right)\sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)\sin nx \tag{6}$$

onde os g_n*'s são coeficientes de Fourier da função* $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π*–periódica na variável x, ímpar tal que* $g(t,x) = e^{-t}$ *para* $t > 0$ *e* $x \in (0,\pi)$. *Escrevendo*

$$g_n(t) = e^{-t}\bar{g}_n\ ,$$

temos

$$\begin{aligned}\bar{g}_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\ dx \\ &= \frac{2}{\pi n}\,(1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 4/(\pi n) & \textit{se}\ \ n\ \textit{é ímpar} \\ 0 & \textit{se}\ \ n\ \textit{é par}\end{cases}\end{aligned}$$

Como $\{\sin nx\ ,\ n \in \mathbb{N}\}$ *é um conjunto de funções L.I., a igualdade (6) se dá termo-a-termo*

$$\frac{1}{\kappa}\dot{c}_n(t) - n^2 c_n(t) = e^{-t}\bar{g}_n$$

cuja solução é (por integração da equação)

$$\begin{aligned} c_n(t) &= c_n(0)e^{-n^2\kappa t} + \kappa\bar{g}_n \int_0^t e^{-n^2\kappa(t-s)}e^{-s}\ ds \\ &= b_n e^{-n^2\kappa t} + \kappa\bar{g}_n e^{-n^2\kappa t}\int_0^t e^{(n^2\kappa-1)s}\ ds \\ &= b_n e^{-n^2\kappa t} + \frac{\kappa\bar{g}_n}{n^2\kappa-1}\left(e^{-t}-e^{-n^2\kappa t}\right)\ . \end{aligned}$$

Para escrever a solução do PVIF (1), (2) e (3), resta ainda calcular os coeficientes b_n's dados por (5):

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{-2}{\pi n}\left(\frac{x}{2}(\pi-x)\cos nx\Big|_0^\pi - \int_0^\pi (\frac{\pi}{2}-x)\cos nx\ dx\right) \\ &= \frac{1}{\pi n}\int_0^\pi (\pi-2x)\cos nx\ dx \\ &= \frac{1}{\pi n^2}\left((\pi-2x)\sin nx|_0^\pi + 2\int_0^\pi \sin nx\ dx\right) \\ &= \frac{2}{\pi n^2}\int_0^\pi \sin nx\ dx \\ &= \frac{2}{\pi n^3}(1-\cos n\pi) = \begin{cases} 4/(\pi n^3) & \text{se} \quad n \text{ é ímpar} \\ 0 & \text{se} \quad n \text{ é par} \end{cases} \end{aligned}$$

A solução do PVIF é, portanto,

$$u(t,x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi}{n^3}\left(e^{-n^2\kappa t} + \frac{n^2\kappa}{n^2\kappa-1}\left(e^{-t}-e^{-n^2\kappa t}\right)\right)\sin nx\ . \tag{7}$$

Devido as descontinuidades da função $g(t,x)$ nas extremidades $x=0$ e $x=\pi$, a convergência da série de Fourier da segunda derivada de u com respeito à x não é uniforme em $[0,\pi]$ e, consequentemente, a troca de ordem das derivadas com o somatório não é garantida, impedindo de se concluir que a série (7) é de fato uma solução do PVIF no sentido estrito. Lembre que a garantia de que as derivadas de u podem ser obtidas derivando termo-a-termo a série requer convergência uniforme em $[0,\pi]$, que não temos quando derivamos duas vezes com respeito a x, termo-a-termo, a parte $(2e^{-t}/\pi)\sum_{n\geq 1}((1-\cos n\pi)/n^3)(n^2\kappa/(n^2\kappa-1))\sin nx$ da solução.

Exercício 2 *Considere o seguinte PVIF*

$$u_t - u_{xx} + k^2 u = 0\,, \qquad k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\,, \tag{8}$$

em $R = \{t>0\,,\,0<x<\pi\}$, com

$$u_x(t,0) = 0 \quad \text{ e } \quad u_x(t,\pi) = 1\,, \qquad t>0 \tag{9}$$

e condição inicial

$$u(0,x) = 0\,, \qquad 0 \le x \le \pi\,. \tag{10}$$

O primeiro passo para resolução do PVFI é transformá-lo em outro PVIF com a condição de contorno homogênea. Escrevemos

$$u(t,x) = U(x) + w(t,x) \tag{11}$$

onde $U(x)$ é a solução independente do tempo (temperatura de equilíbrio) das equações (8) e (9):

$$\begin{aligned} -U'' + k^2 U &= 0\,, \qquad 0 < x < \pi \\ U'(0) &= 0 \\ U'(\pi) &= 1 \end{aligned} \tag{12}$$

cuja solução, impondo as condições de fronteira à solução geral,

$$\begin{aligned} U(x) &= A\cosh kx + B\sinh kx \\ U'(x) &= k\,(A\sinh kx + B\cosh kx) \\ U'(0) &= kB = 0 \\ U'(\pi) &= kA\sinh k\pi = 1 \end{aligned}$$

é

$$U(x) = \frac{\cosh kx}{k\sinh k\pi}\ . \tag{13}$$

Substituindo (11), (12) e (13) em (8), (9) e (10), resulta da linearidade das equações o seguinte PVIF para w

$$w_t - w_{xx} + k^2 w = 0\,, \tag{14}$$

em $R = \{t > 0\,,\, 0 < x < \pi\}$, com

$$w_x(t,0) = w_x(t,\pi) = 0\,, \qquad t > 0 \tag{15}$$

e condição inicial

$$w(0,x) = -\frac{\cosh kx}{k\sinh k\pi}\,, \qquad 0 \le x < \pi\ \ . \tag{16}$$

Note para equação (14)

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} + k^2 u &= -U'' + k^2 U + w_t - w_{xx} + k^2 w \\ &= w_t - w_{xx} + k^2 w = 0 \end{aligned}$$

e as demais equações seguem analogamente.

O PVIF (14), (15) e (16) pode ser resolvido pelo método de Fourier. Substituindo

$$w(t,x) = T(t)X(x)$$

em (14) e (15), resulta em um par de equações ordinárias

$$\begin{aligned} T' + (\lambda^2 + k^2)T &= 0 \\ X'' + \lambda^2 X &= 0 \ , \qquad X'(0) = X'(\pi) = 0 \ . \end{aligned}$$

A segunda equação e condições de fronteira é um problema de autovalores, já resolvido anteriormente:

$$\begin{aligned} \lambda_n &= n \\ X_n(x) &= \cos nx \ , \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

são os autovalores e autofunções correspondentes. A primeira equação tem solução $T(t)$ *proporcional a* $\exp\left(-(\lambda^2 + k^2)t\right)$*. Portanto, a solução do PVIF para* w *é uma combinação linear*

$$w(t, x) = \frac{a_0}{2} e^{-k^2 t} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(n^2+k^2)t} \cos nx \tag{17}$$

onde os a_n*'s são coeficientes de Fourier da função* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*,* 2π*–periódica par tal que* $f(x) = -\cosh kx/(k \sinh k\pi)$ *em* $[0, \pi]$*,*

$$a_0 = \frac{-2}{k\pi \sinh k\pi} \int_0^{\pi} \cosh kx \ dx = \frac{-2}{k^2 \pi}$$

e, para $n \geq 1$*,*

$$a_n = \frac{-2}{k\pi \sinh k\pi} \int_0^{\pi} \cosh kx \ \cos nx \ dx \ .$$

Pela fórmula de Euler, escrevemos o integrando como

$$\cosh kx \ \cos nx = \frac{1}{2} \left(\cos\left(n + ik\right) x + \cos\left(n - ik\right) x \right) \ ,$$

cuja integral resulta

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{-1}{k\pi \sinh k\pi} \int_0^{\pi} \left(\cos\left(n + ik\right) x + \cos\left(n - ik\right) x \right) dx \\ &= \frac{-1}{k\pi \sinh k\pi} \left(\frac{1}{n + ik} \sin\left(n + ik\right) \pi + \frac{1}{n - ik} \sin\left(n - ik\right) \pi \right) \\ &= \frac{-1}{k\pi \sinh k\pi} \left(\frac{1}{n + ik} - \frac{1}{n - ik} \right) i \sinh k\pi \cos n\pi \\ &= \frac{-2}{\pi} \frac{1}{n^2 + k^2} \cos n\pi \end{aligned} \tag{18}$$

onde usamos, na terceira linha, $\sin n\pi = 0$ *e* $\sin ik\pi = i \sinh k\pi$*. Substituindo (13), (17) e (18) em (11), concluímos*

$$u(t, x) = \frac{\cosh kx}{k \sinh k\pi} - \frac{1}{\pi} e^{-k^2 t} \left(\frac{1}{k^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + k^2} e^{-n^2 t} \cos nx \right) \ .$$

Note que $w(t, x)$ *é o transiente da solução:* $\lim_{t \to \infty} w(t, x) = \lim_{t \to \infty} \left(u(t, x) - U(x) \right) \equiv 0$ *e* $U(x)$ *é, portanto, a temperatura de equilíbrio.*