

Quinta Lista de Exercícios de Física Matemática I

(Núcleo de Dirichlet e Integral da Função Seno Cardinal)

IFUSP - 1 Outubro 2015

Exercício 1 1. Considere a seqüência numérica a_n , $n = 0, 1, \dots$, dada por

$$a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx .$$

Mostre que a seqüência tem sinal alternado: $a_{2k} > 0$ e $a_{2k+1} < 0$, $k = 0, 1, \dots$, e $|a_n|$ decresce e tende a 0 quando $n \rightarrow \infty$. Para isso, use

$$\frac{1}{(n+1)\pi} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n\pi} , \quad x \in [n\pi, (n+1)\pi]$$

e obtenha uma quota inferior e superior para a_n quando n é par e ímpar. Note que $\sin x > 0$ (< 0) em $(n\pi, (n+1)\pi)$ se n é par (ímpar).

2. Use as quotas inferiores e superiores para mostrar que a integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} a_n$$

converge.

3. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função π -periódica satisfazendo

$$f(x) = \frac{x - \sin x}{x \sin x} , \quad \text{se } x \in [-\pi/2, \pi/2] \setminus \{0\}$$

e $f(0) = 0$. Mostre que f é uma função contínua em $-\pi/2 < x < \pi/2$ com descontinuidade em $\pm\pi/2$. Como f é integrável e absolutamente integrável, pelo Lema de Riemann-Lebesgue (pág. 56 do texto "Análise de Fourier e EDPs" de Djairo G. de Figueiredo)

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) \sin(2N+1)x \, dx = 0 \tag{1}$$

4. Mostre que a integral acima pode ser escrita como

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) \sin(2N+1)x \, dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} D_N(x) \, dx - \frac{1}{\pi} \int_{-(N+1/2)\pi}^{(N+1/2)\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

onde

$$D_N(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(2N+1)x}{\sin x}$$

é o núcleo de Dirichlet.

5. Conclua, das propriedades de $D_N(x)$, Lema de Riemann-Lebesgue (1) e itens 2 e 4,

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} .$$