

Sexta Lista de Exercícios de Física Matemática I
(Equações a Derivadas Parciais, Séries de Fourier e Equação da Energia)
IFUSP - Outubro 2015

Exercício 1 (Corda percutida por martelo plano) *Mostre que a solução do PVIF:*

$$\frac{1}{\nu^2} u_{tt} - u_{xx} = 0,$$

em $R = \{t > 0, 0 < x < L\}$, sujeita às condições de fronteira

$$u(t, 0) = u(t, L) = 0,$$

para $t > 0$, e iniciais

$$u(0, x) = 0 \quad \text{e} \quad u_t(0, x) = \begin{cases} c & \text{para } |x - a| \leq \delta \\ 0 & \text{para } |x - a| > \delta \end{cases},$$

para $0 \leq x \leq L$, onde $0 < a < L$, é dada por

$$u(t, x) = \frac{4cL}{\pi^2\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi a}{L} \sin \frac{n\pi \delta}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi \nu t}{L}.$$

Observe que a solução é simétrica com respeito a troca de papel de a com δ . Verifique se a condição inicial satisfaz esta propriedade e comente.

Exercício 2 *Obtenha a equação da energia para o PVIF:*

$$\frac{1}{\nu^2} u_{tt} - u_{xx} = 0,$$

em $R = \{(t, x) : t > 0, 0 < x < L\}$, sujeita às condições de fronteira

$$u_x(t, 0) - \alpha u(t, 0) = u_x(t, L) + \beta u(t, L) = 0, \quad t > 0$$

e iniciais

$$u(0, x) = f(x) \quad \text{e} \quad u_t(0, x) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

com α e β constantes positivas. Demonstre a seguir que a solução deste problema, admitindo sua existência, é única. Você seria capaz de interpretar esta condição de fronteira do ponto de vista Físico?

Indicação: Encontre a função $\tilde{E}(t) = E(t) + \tau\alpha^2 u(t, 0)^2/2 + \tau\beta^2 u(t, L)^2/2$, onde $E(t)$ é a função energia (veja eqs. (32) e (33) e texto a seguir na pág. 140 do texto “Análise de Fourier e EDP” de Djairo G. de Figueiredo), que se conserva no tempo e utilize a conservação de $\tilde{E}(t)$ para demonstrar a unicidade do PVIF.