Sétima Lista de Exercícios de Física Matemática I

(Fórmula de D'Alembert e Oscilações Forçadas)

IFUSP - 27 Outubro 2015

Exercício 1 (Corda semi–infinita) *Considere o PVIF:*

$$\frac{1}{v^2}\,u_{tt} - u_{xx} = 0\,, \qquad t > 0\,,\; x > 0$$

sujeita às condições de fronteira

$$u(t,0) = e^{-t}\,, \qquad t \geq 0$$

e iniciais

$$u(0,x) = e^{-x} \qquad \text{e} \qquad u_t(0,x) = \sin x\,, \qquad x \geq 0$$

Determine a solução pela fórmula de D'Alembert (ou diretamente pela fórmula geral da equação) para $x - vt \geq 0$ e $x - vt < 0$. Veja págs. 160–161 do livro texto "Análise de Fourier e EDP", de Djairo G. de Figueiredo.

Exercício 2 (Oscilações forçadas) *Considere o problema:*

$$\frac{1}{v^2}\,u_{tt} - u_{xx} = A\cos 2\pi\omega t\,,$$

em $R = \{t > 0\,,\, 0 < x < L\}$, sujeita à condição de fronteira

$$u(t,0) = u(t,L) = 0 \;\;, \qquad t > 0$$

onde A, v e ω são constantes. Mostre que, exceto para certos valores especiais $\{\omega_n\}$ de ω, o problema acima tem solução da forma $p(x)\cos 2\pi\omega t$ onde

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi}{L}x$$

é uma série de Fourier em senos, devido a condição de fronteira. Calcule a série $p(x)$ e os valores especiais ω_n's. Encontre a solução $u(t,x)$ do problema acima que satisfaz às condições iniciais

$$u(0,x) = 0 \qquad \text{e} \qquad u_t(0,x) = 0\;, \qquad 0 \leq x \leq L$$

quando $\omega \neq \omega_n$ para todo n e quando $\omega = \omega_n$ para algum n.

Indicação: Aplique L'Hopital à solução $u(t,x)$ com $\omega \neq \omega_n$ no limite $\omega \to \omega_n$. Veja Exemplo 2, pág. 148 do livro texto de Djairo G. de Figueiredo.