**Oitava Lista de Exercícios de Física Matemática I – Soluções**

(Transformada de Fourier, Convolução e Identidade de Parseval)

**IFUSP - 30 Novembro 2015**

**Exercício 1** *Calcularemos a transformada de Fourier*

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ e^{-i\xi x}\ dx$$

*das seguintes funções:*

1. *Se* $f(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$, *então*

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|-i\xi x}\ dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{0}^{\infty} e^{-(a-i\xi)x}\ dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(a-i\xi)x}\ dx \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{a+i\xi} + \frac{1}{a-i\xi} \right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\xi^2 + a^2}
\end{aligned}$$

2. *Se* $f(x) = e^{-a|x|} \sin cx$, $a > 0$ *e* $c \in \mathbb{R}$, *escrevemos*

$$f(x) = e^{-a|x|}\ \frac{e^{icx} - e^{-icx}}{2i}\ .$$

*Fazendo uso das propriedades*

$$\begin{aligned}
a\widehat{f_1 + b}f_2(\xi) &= a\hat{f}_1(\xi) + b\hat{f}_2(\xi) \\
\widehat{fe^{\pm icx}}(\xi) &= \hat{f}(\xi \mp c)
\end{aligned}$$

*juntamente com a transformadas de Fourier do ítem 1., temos*

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{2i} \left( \widehat{e^{-a|x|+icx}}(\xi) - \widehat{e^{-a|x|-icx}}(\xi) \right) \\
&= \frac{1}{2i} \left( \widehat{e^{-a|x|}}(\xi - c) - \widehat{e^{-a|x|}}(\xi - c) \right) \\
&= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{a}{(\xi - c)^2 + a^2} - \frac{a}{(\xi + c)^2 + a^2} \right) \\
&= -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2ac\xi}{(\xi^2 + a^2 + c^2 - 2c\xi)(\xi^2 + a^2 + c^2 + 2c\xi)} \\
&= -i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2ac\xi}{(\xi^2 + a^2 + c^2)^2 - 4c^2\xi^2}
\end{aligned}$$

3. *Se* $f(x) = \cos kx$ *para* $|x| \leq N\pi/k$ *e* $f(x) = 0$ *para* $|x| > N\pi/k$, *onde* $N$ *e* $k$ *são inteiros positivos, então*

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-N\pi/k}^{N\pi/k} e^{-i(\xi-k)x} dx + \int_{-N\pi/k}^{N\pi/k} e^{-i(\xi+k)x} dx \right) \\
&= \frac{i}{2\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{\xi - k} \left( e^{-i(\xi-k)N\pi/k} - e^{i(\xi-k)N\pi/k} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\xi + k} \left( e^{-i(\xi+k)N\pi/k} - e^{i(\xi+k)N\pi/k} \right) \right) \\
&= \frac{i(-1)^N}{\sqrt{2\pi}} \frac{\xi}{\xi^2 - k^2} \left( e^{-i\xi N\pi/k} - e^{i\xi N\pi/k} \right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-1)^N \frac{\xi}{\xi^2 - k^2} \sin \frac{N\pi}{k} \xi
\end{aligned}$$

*onde na terceira igualdade fizemos uso de*

$$e^{\pm iN\pi} = (-1)^N \quad .$$

4. *Se* $f(x) = 1 - |x|$ *se* $|x| \leq 1$ *e* $f(x) = 0$ *se* $|x| > 1$, *então*

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \int_{-1}^{1} (1 - |x|) \, e^{-i\xi x} dx \\
&= \int_{-1}^{0} (1 + x) \, e^{-i\xi x} dx + \int_{0}^{1} (1 - x) \, e^{-i\xi x} dx \\
&= \int_{0}^{1} (1 - x) \, e^{i\xi x} dx + \int_{0}^{1} (1 - x) \, e^{-i\xi x} dx \;\; \equiv I(\xi) + I(-\xi).
\end{aligned}$$

*Integrando por partes*

$$\begin{aligned}
I(\xi) &= \int_{0}^{1} (1 - x) \, e^{i\xi x} dx \\
&= \frac{1}{i\xi} \left( (1 - x)|_0^1 + \int_0^1 e^{i\xi x} dx \right) \\
&= \frac{-1}{i\xi} + \frac{1}{\xi^2} (1 - e^{i\xi})
\end{aligned}$$

*de onde se conclui*

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\xi^2}(1-e^{i\xi}) + \frac{1}{\xi^2}(1-e^{-i\xi}) \\ &= \frac{2}{\xi^2}(1-\cos\xi) \\ &= \frac{2}{\xi^2}(1-\cos^2\xi/2+\sin^2\xi/2) \\ &= \frac{\sin^2\xi/2}{(\xi/2)^2}\ .\end{aligned}$$

*Observe que em todos os ítens acima* $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *é uma função integrável e integrável em valor absoluto, no sentido de uma integral de Riemann imprópria:* $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\ dx = \lim_{N,M\to\infty}\int_{-M}^{N}|f(x)|\ dx < \infty$*, estando desta forma definida sua transformada de Fourier* $\hat{f}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$*. Sendo* $f$ *uma função real sua transformada de Fourier* $\hat{f}$ *é real se* $f$ *for par e imaginária se* $f$ *for ímpar. Observe também que* $\hat{f}(\xi)$ *tem a mesma paridade de* $f(x)$*.*

**Exercício 2** ***(i)*** *Para encontrar uma função* $f(x)$ *cuja transformada de Fourier é*

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\sin b\xi}{\xi}e^{-a\xi^2} := \hat{\chi}(\xi)\hat{\phi}(\xi)\ , \qquad a>0\ ,\ b\in\mathbb{R} \tag{1}$$

*faremos uso do teorema da convolução (Teorema 6.3' do livro texto "Análise de Fourier e equações diferenciais parciais", Djairo G. de Figueiredo. Para um exercício semelhante, veja pág. 210 deste texto.): se*

$$f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\chi * \phi\ , \tag{2}$$

*então*

$$\hat{f} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\widehat{\chi * \phi} = \hat{\chi}\hat{\phi}\ .$$

*As condições para o teorema da convolução citado são* $\chi$ *e* $\phi$ *integráveis e absolutamente integráveis e* $\chi$ *ou* $\phi$ *contínua e limitada. Estas condições são satisfeitas como veremos a seguir.*

*Se* $\chi(x) = \chi_b(x) = \sqrt{\pi/2}$ *para* $|x|\le b$ *e* $\chi(x)=0$ *para* $|x|>b$*, então*

$$\begin{aligned}\hat{\chi}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\chi(x)\ e^{-i\xi x}\ dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-b}^{b}e^{-i\xi x}\ dx \\ &= \frac{1}{\xi}\frac{e^{-i\xi b}-e^{-i\xi b}}{-2i} \\ &= \frac{\sin b\xi}{\xi}\end{aligned}$$

*coincide com a definição da função $\hat{\chi}$ em (1). Note que $\chi$ é integrável e absolutamente integrável.*

*Se $\phi(x) = e^{-x^2/(4a)}/\sqrt{2a}$, então $\phi \in \mathscr{S}$* [1] *e*

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\ e^{-i\xi x}\ dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/(4a)}\ e^{-i\xi x}\ dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\sqrt{4a}\xi y\right) e^{-y^2}\ dy \equiv \psi\left(\sqrt{4a}\xi\right)
\end{aligned} \tag{3}$$

*onde $\psi = \psi(t)$ satisfaz a equação*

$$\psi' + \frac{t}{2}\psi = 0$$

*com $\psi(0) = 1$, cuja solução $\psi(t) = \exp\left(-t^2/4\right)$ resulta*

$$\hat{\phi}(\xi) = \psi\left(\sqrt{4a}\xi\right) = e^{-a\xi^2} \tag{4}$$

*coincidindo com a definição de $\hat{\phi}$ em (1).*

*Substituindo $\chi$ e $\phi$ no lado direito de (2), concluimos*

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x-y)\phi(y) dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x-y)\ e^{-y^2/(4a)} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x-y)\ e^{-y^2/(4a)} dy
\end{aligned}$$

*e, usando*

$$|x-y| \leq b \Leftrightarrow -b \leq y-x \leq b \Leftrightarrow x-b \leq y \leq x+b\ ,$$

*continuamos*

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{8a}} \int_{x-b}^{x+b} e^{-y^2/(4a)} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{(x-b)/\sqrt{4a}}^{(x+b)/\sqrt{4a}} e^{-s^2} ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \int_{0}^{(x+b)/\sqrt{4a}} e^{-s^2} ds - \int_{0}^{(x-b)/\sqrt{4a}} e^{-s^2} ds \right) \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{8}} \left( \operatorname{erf}\left(\frac{x+b}{\sqrt{4a}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-b}{\sqrt{4a}}\right) \right)
\end{aligned}$$

[1] Em particular, $\phi$ é contínua, limitada, integrável e absolutamente integrável.

*onde* $\operatorname{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-s^2} ds$ *é a função erro.*

***(ii)*** *Verifiquemos o teorema de Plancherel–Parseval:* $\|f\|^2 = \left\|\hat{f}\right\|^2$ *para a função Gaussiana:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\ e^{-x^2/(2a)}$$

*cuja transformada de Fourier é, por (3) e (4) com a substituído por* $a/2$,

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a\xi^2/2}\ .$$

*Por um lado, temos*

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 dx &= \frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/a}\ dx \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}}\ .\end{aligned}$$

*Por outro lado, temos*

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)^2 d\xi &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\xi^2}\ d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}}\end{aligned}$$

*concluindo a igualdade.*