Oitava Lista de Exercícios de Física Matemática I

(Transformada de Fourier, Convolução e Identidade de Parseval)

IFUSP - 10 Novembro 2015

Exercício 1 *Calcule a transformada de Fourier das seguintes funções:*

1.

$$f(x) = e^{-a|x|} \;, \qquad a > 0$$

2.

$$f(x) = e^{-a|x|} \sin cx \;, \qquad a > 0 \;,\; c \in \mathbb{R}$$

3.

$$f(x) = \begin{cases} \cos kx & \text{se} \quad |x| \leq N\pi/k \\ 0 & \text{se} \quad |x| > N\pi/k \end{cases}$$

onde N e k são inteiros positivos.

4.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{se} \quad |x| \leq 1 \\ 0 & \text{se} \quad |x| > 1 \end{cases}$$

Exercício 2 ***(i)*** *Calcule a função $f(x)$ cuja transformada de Fourier é*

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\sin b\xi}{\xi} e^{-a\xi^2} \;, \qquad a > 0 \;,\; b \in \mathbb{R}$$

(ii) *Verifique, em seguida, o teorema de Plancherel–Parseval: $\|f\|^2 = \left\|\hat{f}\right\|^2$ para a função Gaussiana:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}}\, e^{-x^2/(2a)} \,.$$

Indicação: Para primeira parte, utilize os teoremas da convolução e da inversa (Teoremas 6.3' e 6.1 do livro texto "Análise de Fourier e EDP", Djairo G. de Figueiredo):

$$f = \left(\hat{f}\right)^{\vee} = \left(\hat{\chi}\hat{\phi}\right)^{\vee} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \chi * \phi$$

onde $\hat{\chi}(\xi) = (1/\xi)\sin b\xi$ e $\hat{\phi}(\xi) = e^{-a\xi^2}$.