Nona Lista de Exercícios de Física Matemática I

(Transformada de Fourier, Convolução e Inversa: Aplicações em EDP)

IFUSP - 17 Novembro 2015

Exercício 1 (Vibrações forçadas) *Use a transformada de Fourier para obter a solução particular (fórmula de D' Alembert forçada, págs 158-160 de "Análise de Fourier e EDP", Djairo G. de Figueiredo.)*

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{v}{2}\int_0^t \int_{x-v(t-\tau)}^{x+v(t-\tau)} h(\tau,y)dyd\tau \\ &= \frac{v}{2}\int_\Omega h(\tau,y)d\tau dy \end{aligned}$$

onde a integral é sobre a região triangular $\Omega = \Delta_{ABC}$ do plano $t \times x$ de vértices $A = (t,x)$, $B = (0, x+vt)$ e $C = (0, x-vt)$ (setor de influência através de ponto (t,x)), para o problema de valor inicial (PVI) de uma corda elástica infinita forçada:

$$\frac{1}{v^2}u_{tt} - u_{xx} = h(t,x) \ , \qquad t > 0 \ , \ x \in \mathbb{R}$$

com

$$u(0,x) = u_t(0,x) = 0 \ , \qquad x \in \mathbb{R} \ .$$

Calcule a solução do problema para $h(t,x) = \sin 2\pi\omega t$.

Indicação: Note que $x(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{\sin a(t-\tau)}{a} b(\tau)d\tau$ satisfaz a equação $x'' + a^2 x = b(t)$ com $x(0) = x'(0) = 0$.

Exercício 2 (Equação do calor não–homogênea) *Use a transformada de Fourier para resolver o problema de valor inicial (PVI) não–homogêneo*

$$\frac{1}{\kappa}u_t - u_{xx} = g(t,x) \ , \qquad t > 0 \ , \ x \in \mathbb{R}$$

e

$$u(0,x) = f(x) \ , \qquad x \in \mathbb{R} \ ,$$

onde $f(x)$ e $g(t,x)$ para cada $t > 0$ são funções de $\mathscr{S}$ (classe de Schwartz).