Primeira Prova de F ́ısica Matemática I (Equaç ̃oes a Derivadas Parciais e Séries de Fourier) IFUSP - 5 de Outubro de 2015 - 10:00 / 12:15 hs

Exerc ́ıcio 1 (Valor 3.0) Escreva a série de Fourier da funç ̃ao f : R → R, 2π –periódica, ́ımpar e tal que

f(x) =

1 2

(π − x) , 0 < x ≤ π .

Calcule, em seguida, a série de Fourier da funç ̃ao

F(x) =

∫

x

0

f(y)dy

e use a identidade de Parseval para mostrar que

∞∑

n=1

1 n4

=

π4 90

.

Exerc ́ıcio 2 (Valor 3.5) Escreva a série de Fourier Sf(x) da funç ̃ao f : R −→ R,

f(x) = exp

(

x 2π

)

, −π ≤ x<π, (1)

2π–periódica. Use o Teorema de Fourier sobre a convergência pontual:

n→∞ lim

S

n

f(x)=(f(x + 0) + f(x − 0))/2

(aplicável para f seccionalmente diferenciável) em x = π para mostrar que

∞∑

n=1

1 1+4π2n2

1 4

3 − e e − 1

Exerc ́ıcio 3 (Valor 3.5) Uma barra condutora de comprimento unitário tem as faces laterais em contato com uma fonte externa α2 cosαx e as faces transversais `a esquerda e direita em contato com um reservatório de calor `a temperatura 1◦ e 0◦, respectivamente. A conduç ̃ao do calor na barra é governada pelo seguinte problema de valores inicial e de fronteira (PVIF): 1 κ

=

u

t

− u

xx

= α2 cosαx , (2)

em R = {(t, x) : t > 0, 0 <x< 1}, com

u(t,0) = 1 e u(t,1) = 0, t > 0 (3)

e

u(0,x) = 0 (4) Determine a temperatura de equil ́ıbrio. Determine a soluç ̃ao deste problema para α = mπ onde m é um inteiro.

Indicaç ̃ao: Determine a soluç ̃ao U = U(x), independente do tempo, das equaç ̃oes (2) e (3). Escreva u(t, x) = U(x) + w(t, x) e o PVIF para a funç ̃ao w. Resolva o PVIF para w pelo método de Fourier. Escreva a soluç ̃ao u e verifique que U(x) é a temperatura de equil ́ıbrio.

1