Primeira Prova de Física Matemática I – Soluções

(Equações a Derivadas Parciais e Séries de Fourier)

IFUSP - 10 de Outubro de 2015

Exercício 1 (Valor 3.5) *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função 2π –periódica, ímpar, tal que*

$$f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x) \quad , \qquad 0 < x \leq \pi \ .$$

A série de Fourier Sf de f é

$$Sf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

onde

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(\pi - x) \sin nx \ dx \\ &= \frac{-1}{\pi n} \left((\pi - x) \cos nx|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos nx \ dx \right) \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Portanto,

$$Sf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx \ . \tag{1}$$

A série de Fourier

$$SF(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx \tag{2}$$

da função $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π–periódica tal que

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x f(y)\, dy \\ &= \int_0^x \frac{1}{2}(\pi - y)\, dy = \\ &= \frac{1}{2}\left(\pi x - \frac{x^2}{2}\right) \ , \qquad 0 < x \leq \pi \end{aligned} \tag{3}$$

é, pelo Teorema sobre a integração de série de Fourier (pág. 33, "Análise de Fourier e EDPs", Djairo G. de Figueiredo), dada pela integração de (1) termo-a-termo

$$\begin{aligned} SF(x) &= \int_0^x Sf(y) \ dy \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (1 - \cos nx) \end{aligned} \tag{4}$$

Note que, como $f(x)$ é 2π–periódica ímpar: $f(-x) = -f(x)$ então, $F(x) = \int_0^x f(y)dy$ é uma função 2π–periódica par:

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(y)dy = \int_0^{x} f(-y)d(-y) = \int_0^{x} -f(-y)dy = \int_0^{x} f(y)dy = F(x)$$

e, portanto, $F(x)$ em $(-\pi, 0]$ é dada pela reflexão par de (3). Devido a convergência uniforme da série (4) e o Teorema de Fourier,

$$F(x) = SF(x),$$

de onde se conclui com (3), (2) e (4):

$$A_n = \frac{-1}{n^2} \ , \tag{5}$$

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left(\pi y - \frac{y^2}{2}\right) dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\pi y^2 - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3} \end{aligned} \tag{6}$$

e

$$\frac{1}{2}\left(\pi x - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{6}\pi^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cos nx \ , \qquad 0 < x < \pi \ .$$

Pela identidade de Parseval

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)^2 dx = \frac{A_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2$$

concluímos, juntamente com

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)^2 dx &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{4}\left(\pi x - \frac{x^2}{2}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\pi^2 x^2 - \pi x^3 + \frac{x^4}{4}\right) dx \\ &= \frac{\pi^4}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{20}\right) \\ &= \frac{\pi^4}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = \frac{\pi^4}{15} \ , \end{aligned}$$

devido a paridade de (3), e

$$\frac{A_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 = \frac{\pi^4}{18} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \ ,$$

devido a (6) e (5), a relação almejada:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \pi^4\left(\frac{1}{15} - \frac{1}{18}\right) = \frac{\pi^4}{3}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) = \frac{\pi^4}{90} \ .$$

Exercício 2 (Valor 3.5) *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a função*

$$f(x) = \exp\left(\frac{x}{2\pi}\right) \ , \qquad -\pi \le x < \pi \, , \tag{7}$$

2π–periódica. Calculemos sua séries de Fourier

$$Sf(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

onde

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x/(2\pi)}\ e^{-inx}\ dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1/(2\pi)-in)x}\ dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi}{1-2\pi in}\left(e^{(1/(2\pi)-in)\pi} - e^{-(1/(2\pi)-in)\pi}\right) \\
&= \frac{1}{1-2\pi in}\left(e^{1/2}\left(\cos n\pi - i\sin n\pi\right) - e^{-1/2}\left(\cos n\pi + i\sin n\pi\right)\right) \\
&= \frac{2\sinh(1/2)}{1-2\pi in}\cos n\pi \ ,
\end{aligned}$$

resultando

$$\begin{aligned}
Sf(x) &= 2\sinh(1/2)\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{1-2\pi in}e^{inx} + \frac{1}{1+2\pi in}e^{-inx}\right)\right) \\
&= 2\sinh(1/2)\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+4\pi^2n^2}\left(\left(1+2\pi in\right)e^{inx} + \left(1-2\pi in\right)e^{-inx}\right)\right) \\
&= 2\sinh(1/2)\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+4\pi^2n^2}\left(\cos nx - 2\pi n\sin nx\right)\right)
\end{aligned} \tag{8}$$

Aplicando o Teorema de Fourier,

$$\lim_{n\to\infty} S_n f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x+0) + f(x-0)\right)$$

com $f(x)$ e $Sf(x)$ dados por (7) e (8), no ponto $x = \pi$

$$(e^{1/2} - e^{-1/2})\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+4\pi^2n^2}\cos n\pi\right) = \frac{e^{-1/2} + e^{1/2}}{2}$$

concluimos

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+4\pi^2n^2} &= \frac{1}{4}\left(\frac{e^{-1/2}+e^{1/2}}{e^{1/2}-e^{-1/2}}-2\right)\\ &= \frac{1}{4}\frac{3e^{-1/2}-e^{1/2}}{e^{1/2}-e^{-1/2}}\\ &= \frac{1}{4}\frac{3-e}{e-1}\ .\end{aligned}$$

Exercício 3 (Valor 3.5) *Considere o seguinte problema de valores inicial e de fronteira (PVIF):*

$$\frac{1}{\kappa}\,u_t-u_{xx}=\alpha^2\cos\alpha x\ , \qquad \alpha\in\mathbb{R} \tag{9}$$

em $R=\{(t,x): t>0\,,\,0<x<1\}$, *com*

$$u(t,0)=1 \qquad e \qquad u(t,1)=0\ , \qquad t>0 \tag{10}$$

e

$$u(0,x)=0\ . \tag{11}$$

Calculemos, inicialmente, a solução de (9) e (10), independente do tempo. Seja $U=U(x)$ *a solução das seguintes equações*

$$-U''=\alpha^2\cos\alpha x\ , \tag{12}$$

e

$$U(0)=1 \qquad e \qquad U(1)=0\ . \tag{13}$$

A solução geral de (12) é da forma

$$U(x)=U^{part}(x)+U^{\hom}(x)$$

onde $U^{part}(x)$ *é uma solução particular de (12):* $U^{part}(x)=\cos\alpha x$*, por exemplo,* $U^{\hom}(x)$ *é a solução geral da equação homogênea* $-U''=0$*:*[1]

$$U(x)=\cos\alpha x+a+bx$$

com a *e* b *determinados pelas condições (13)*

$$\begin{aligned}U(0) &= 1+a=1\\ U(1) &= \cos\alpha+b=0\end{aligned}$$

cuja solução determina

$$U(x)=\cos\alpha x-x\cos\alpha\ .$$

Em seguida, escrevemos

$$u(t,x)=U(x)+w(t,x) \tag{14}$$

[1]Obtemos a solução geral $U(x)$ por integração de (12): $U'(x)=\int -\alpha^2\cos\alpha x\ dx=-\alpha\sin\alpha x+b$ e $U(x)=\int(-\alpha\sin\alpha x+b)\,dx=\cos\alpha x+bx+a$

que ao substituir no PVIF original (eqs. (9), (10) e (11)) reduz a um PVIF para a função w:

$$\frac{1}{\kappa}\,w_t - w_{xx} = 0\ , \tag{15}$$

em $R = \{(t,x) : t > 0\,,\, 0 < x < 1\}$*, com condição de fronteira homogênea*

$$w(t,0) = w(t,1) = 0\,, \qquad t > 0 \tag{16}$$

e inicial

$$w(0,x) = -U(x) = x\cos\alpha - \cos\alpha x\ . \tag{17}$$

Resolvendo o PVIF para w pelo método de Fourier, as soluções de (15) e (16) da forma

$$w(t,x) = T(t)X(x)$$

satisfazem um par de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{aligned} T' + \lambda^2\kappa T &= 0 \\ X'' + \lambda^2 X &= 0\ , \qquad X(0) = X(1) = 0 \end{aligned}$$

cuja solução geral

$$T = Ce^{-\lambda^2\kappa t}$$

e

$$\begin{aligned} X(x) &= A\cos\lambda x + B\sin\lambda x \\ X(0) &= A = 0 \\ X(1) &= B\sin\lambda = 0 \end{aligned}$$

resulta em uma seqüência de autovalores e autofunções correspondentes

$$\begin{aligned} \lambda_n &= n\pi \\ X_n &= \sin n\pi x\ , \qquad n \in \mathbb{N}\ . \end{aligned}$$

Segundo o princípio de superposição, a solução do problema é dada por uma combinação linear de soluções $w_n(t,x) = \exp\left(-n^2\pi^2\kappa t\right)\sin n\pi x$*,* $n \in \mathbb{N}$*:*

$$w(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n^2\pi^2\kappa t}\sin n\pi x \tag{18}$$

onde os b_n *são coeficientes ímpares da condição inicial (17), com* $\alpha = m\pi$*,*

$$b_n = I\cos m\pi + J$$

com

$$\begin{aligned} I &= 2\int_0^1 x\sin n\pi x\ dx \\ &= \frac{-2}{n\pi}\left(x\cos n\pi x\big|_0^1 - \int_0^1 \cos n\pi x\ dx\right) \\ &= \frac{-2}{n\pi}\cos n\pi \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
J &= -2\int_0^1 \cos m\pi x \;\; \sin n\pi x \; dx \\
&= -\int_0^1 (\sin(n+m)\pi x + \sin(n-m)\pi x)\, dx \\
&= \left(\frac{1}{(n+m)\pi}\cos(n+m)\pi x + \frac{1}{(n-m)\pi}\cos(n-m)\pi x \right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{(n^2-m^2)\pi}\left((n-m)\cos(n+m)\pi + (n+m)\cos(n-m)\pi - 2n\right) \\
&= \frac{2n}{(n^2-m^2)\pi}\left(\cos n\pi \cos m\pi - 1\right) \ , \qquad (19)
\end{aligned}$$

resultando

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{n\pi}\left[\left(-1+\frac{n^2}{n^2-m^2}\right)\cos n\pi\cos m\pi - \frac{n^2}{n^2-m^2}\right] \\
&= \frac{-2}{n\pi}\frac{n^2-(-1)^{n+m}m^2}{n^2-m^2} \ . \qquad (20)
\end{aligned}$$

Observe que a equação (20) permanece válida quando $n = m$*: a integral* J*, dada pela primeira linha de (19), se anula e* $b_n = I\cos n\pi = -2/(n\pi)$*, não send necessário separar o termo* m *na soma (18). Substituindo (18) e (20) em (14), concluímos*

$$u(t,x) = U(x) - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-(-1)^{n+m}m^2}{n(n^2-m^2)}e^{-n^2\pi^2\kappa t}\sin n\pi x \ . \qquad (21)$$

Temperatura de equilíbrio: todas as componentes da solução (21) do PVIF para ω *tendem a* 0 *quando* $t \to \infty$*:*

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} w(t,x) &= \lim_{t\to\infty}(u(t,x) - U(x)) \\
&= -\frac{2}{\pi}\lim_{t\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-(-1)^{n+m}m^2}{n(n^2-m^2)}e^{-n^2\pi^2\kappa t}\sin n\pi x \\
&= -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-(-1)^{n+m}m^2}{n(n^2-m^2)}\lim_{t\to\infty}e^{-n^2\pi^2\kappa t}\sin n\pi x \ = 0
\end{aligned}$$

devido a convergência uniforme da série em cada intervalos fechados $[t_0, t_1]$ *em* $t > 0$*, de modo que* $U(x)$ *é a temperatura de equilíbrio.*