Primeira Prova de Física Matemática I

(Equações a Derivadas Parciais e Séries de Fourier)

IFUSP - 5 de Outubro de 2015 - 10:00 / 12:15 hs

Exercício 1 (Valor 3.0) *Escreva a série de Fourier da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π –periódica, ímpar e tal que*

$$f(x) = \frac{1}{2}(\pi - x) \quad , \qquad 0 < x \leq \pi \ .$$

Calcule, em seguida, a série de Fourier da função

$$F(x) = \int_0^x f(y)\, dy$$

e use a identidade de Parseval para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \ .$$

Exercício 2 (Valor 3.5) *Escreva a série de Fourier $Sf(x)$ da função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,*

$$f(x) = \exp\left(\frac{x}{2\pi}\right) \ , \qquad -\pi \leq x < \pi \, , \tag{1}$$

2π–periódica. Use o Teorema de Fourier sobre a convergência pontual:

$$\lim_{n\to\infty} S_n f(x) = (f(x+0) + f(x-0))/2$$

(aplicável para f seccionalmente diferenciável) em $x = \pi$ para mostrar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + 4\pi^2 n^2} = \frac{1}{4}\, \frac{3 - e}{e - 1}$$

Exercício 3 (Valor 3.5) *Uma barra condutora de comprimento unitário tem as faces laterais em contato com uma fonte externa $\alpha^2 \cos \alpha x$ e as faces transversais à esquerda e direita em contato com um reservatório de calor à temperatura 1° e 0°, respectivamente. A condução do calor na barra é governada pelo seguinte problema de valores inicial e de fronteira (PVIF):*

$$\frac{1}{\kappa}\, u_t - u_{xx} = \alpha^2 \cos \alpha x \ , \tag{2}$$

em $R = \{(t, x) : t > 0 \, , \, 0 < x < 1\}$, com

$$u(t, 0) = 1 \qquad e \qquad u(t, 1) = 0 \, , \qquad t > 0 \tag{3}$$

e

$$u(0, x) = 0 \tag{4}$$

Determine a temperatura de equilíbrio. Determine a solução deste problema para $\alpha = m\pi$ onde m é um inteiro.

Indicação: Determine a solução $U = U(x)$, independente do tempo, das equações (2) e (3). Escreva $u(t, x) = U(x) + w(t, x)$ e o PVIF para a função w. Resolva o PVIF para w pelo método de Fourier. Escreva a solução u e verifique que $U(x)$ é a temperatura de equilíbrio.