Segunda Prova de Física Matemática I – Soluções

(Equações a Derivadas Parciais e Transformada de Fourier)

IFUSP - 7 Dezembro 2015

Exercício 1 (Valor 3.25) *A transformada de Fourier de*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\left(1 - \dfrac{|x|}{2a}\right) & \text{se} \quad |x| \le 2a \\ 0 & \text{se} \quad |x| > 2a \end{cases}$$

é

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-2a}^{2a} \left(1 - \frac{|x|}{2a}\right) e^{-i\xi x} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-2a}^{0} \left(1 + \frac{x}{2a}\right) e^{-i\xi x} dx + \frac{1}{2} \int_{0}^{2a} \left(1 - \frac{x}{2a}\right) e^{-i\xi x} dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{0}^{2a} \left(1 - \frac{x}{2a}\right) e^{i\xi x} dx + \frac{1}{2} \int_{0}^{2a} \left(1 - \frac{x}{2a}\right) e^{-i\xi x} dx \ \equiv \frac{1}{2}\left(I(\xi) + I(-\xi)\right) \qquad (1)
\end{aligned}$$

onde, por integração parcial,

$$\begin{aligned}
I(\xi) &= \left(1 - \frac{x}{2a}\right) \frac{e^{i\xi x}}{i\xi}\bigg|_0^{2a} + \frac{1}{2ia\xi} \int_0^{2a} e^{i\xi x} dx \\
&= \frac{-1}{i\xi} - \frac{1}{2a\xi^2}\left(e^{2ia\xi} - 1\right) .
\end{aligned}$$

Substituindo este resultado em (1), resulta

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= -\frac{1}{4a\xi^2}\left(e^{2ia\xi} - 1\right) - \frac{1}{4a\xi^2}\left(e^{-2ia\xi} - 1\right) \\
&= \frac{1}{2a\xi^2}\left(1 - \cos 2a\xi\right) \\
&= \frac{1}{2a\xi^2}\left(1 - \cos^2 a\xi + \sin^2 a\xi\right) \\
&= \frac{\sin^2 a\xi}{a\xi^2} .
\end{aligned}$$

Utilizando o Teorema de Plancherel–Parseval, temos

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin a\xi}{\xi}\right)^4 d\xi &= a^2\int_{-\infty}^{\infty}\left|\hat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \\
&= a^2\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx \\
&= \pi a^2\int_0^{2a}\left(1-\frac{x}{2a}\right)^2 dx \\
&= \pi a^2\int_0^{2a}\left(1-\frac{x}{a}+\frac{x^2}{4a^2}\right) dx \\
&= \frac{2}{3}\pi a^3 \ .
\end{aligned}
$$

Exercício 2 (Valor 3.5) *Considere o problema de Cauchy (PVIF)*

$$\frac{1}{v^2}u_{tt}-u_{xx}=0\,, \qquad t>0\,,\ x>0, \tag{2}$$

com $u(t,0)=0$, $t>0$, *e*

$$u(0,x)=\sin x \qquad \text{e} \qquad u_t(0,x)=e^{-x}\,, \qquad x>0\ . \tag{3}$$

(a) *A solução geral de (2) é* $u(t,x)=F(x+vt)+G(x-vt)$, *onde* $F(x)$ *e* $G(x)$ *são funções arbitrárias determinados pelos dados inicias e de fronteira. Para* $x-vt\geq 0$, *temos*

$$
\begin{aligned}
u(0,x) &= F(x)+G(x)=\sin x \\
u_t(0,x) &= v\,(F(x)-G(x))'=e^{-x}\ .
\end{aligned}
$$

Integrando a segunda equação

$$F(x)-G(x)=\frac{-1}{v}e^{-x}+2C$$

onde C *é uma constante. Resolvendo para* $F(x)$ *e* $G(x)$, *temos*

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{2}\left(\sin x-\frac{e^{-x}}{v}\right)+C \\
G(x) &= \frac{1}{2}\left(\sin x+\frac{e^{-x}}{v}\right)-C
\end{aligned} \tag{4}
$$

resultando

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= \frac{1}{2}\left(\sin(x+vt)+\sin(x-vt)\right)+\frac{1}{2v}\left(e^{-x+vt}-e^{-x-vt}\right) \\
&= \sin x\cos vt+\frac{e^{-x}}{v}\sinh vt\ .
\end{aligned} \tag{5}
$$

Para $x - vt < 0$, usamos a condição de fronteira

$$u(t,0) = F(vt) + G(-vt) = 0$$

que implica, devido a (4),

$$G(-y) = -F(y) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-y}}{v} - \sin y\right) - C$$

para $y > 0$, de onde se conclui, juntamente com a solução geral e (4),

$$\begin{aligned} u(t,x) &= F(x+vt) + G(-(vt-x)) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin(x+vt) - \sin(vt-x)\right) + \frac{1}{2v}\left(e^{-vt+x} - e^{-x-vt}\right) \\ &= \sin x \cos vt + \frac{e^{-vt}}{v}\sinh x \ . \end{aligned} \tag{6}$$

(b) *Podemos reduzir o PVIF original em $\mathbb{R}_+$ a um PVI em $\mathbb{R}$, estendendo os dados iniciais (3) como uma função ímpar: $\tilde{f}(x) = \sin x$ e*

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} e^{-x} & se \quad x > 0 \\ -e^{x} & se \quad x < 0 \end{cases}$$

A solução deste problema, dada pela fórmula de D'Alembert usual (para isso, basta substituir na primeira equação em (5) as funções exponenciais pelas exponenciais do módulo do argumento)

$$u(t,x) = \sin x \cos vt + \frac{1}{2v}\left(e^{-|x-vt|} - e^{-|x+vt|}\right) \ , \tag{7}$$

é válida para todo $t \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}$ e reproduz o resultado anterior quando retrito ao domínio $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. Note que esta solução satisfaz $u(t,0) = 0$. Note ainda que não é possível tomar $x \leq 0$ e $t > 0$ na solução anterior (5) sem violar a condição $x - vt > 0$. Quanto a paridade das soluções (5), (6) e (7) com respeito a variável x, a primeira não tem paridade a segunda é ímpar pois é a combinação linear de duas funções ímpares, $\sin x$ e $\sinh x$. A terceira e última solução é ímpar por construção.

Exercício 3 (Valor 3.25) *Tomando a transformada de Fourier da equação de calor*

$$u_t - u_{xx} = e^{a^2 t} f(x) \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \widehat{u_t - u_{xx}} &= \widehat{u}_t - \widehat{u_{xx}} \\ &= \hat{u}_t + \xi^2 \hat{u} = e^{a^2 t}\hat{f}(\xi) \end{aligned} \tag{9}$$

obtemos uma equação ordinária de primeira ordem em t sujeita a condição inicial (a transformada de Fourier de uma função identicamente nula)

$$u(0,\xi) = 0 \ , \qquad \xi \in \mathbb{R} \ . \tag{10}$$

A solução particular do par de equações

$$\begin{aligned} y' + \alpha y &= \beta(t) \ , \qquad t > 0 \ , \\ y(0) &= 0 \end{aligned}$$

é, pelo método da variação das constantes,

$$y(t) = \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}\beta(s)\ ds \ .$$

A solução particular do par de equações (9) e (10) para ξ *fixo é, portanto,*

$$\begin{aligned} \hat{u}(t,\xi) &= \int_0^t e^{-\xi^2(t-s)}e^{a^2 s}\hat{f}(\xi)ds \\ &= \hat{f}(\xi)e^{-t\xi^2}\int_0^t e^{(\xi^2+a^2)s}ds \\ &= \hat{f}(\xi)e^{-t\xi^2}\frac{1}{\xi^2+a^2}\left(e^{(\xi^2+a^2)t}-1\right) \\ &= \hat{f}(\xi)\frac{1}{\xi^2+a^2}\left(e^{a^2 t}-e^{-t\xi^2}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{\xi^2+a^2}\left(e^{a^2 t}-e^{-t\xi^2}\right) \ , \end{aligned} \tag{11}$$

onde na última igualdade usamos $\hat{f}(\xi) = a\sqrt{2/\pi}$.

Para o primeiro termo de (11), a anti–transformada de Fourier de $\hat{h}(\xi) = \sqrt{2/\pi}a/(\xi^2+a^2)$ *é*

$$h(x) = e^{-|x|} \ .$$

Para o segundo termo de (11), a anti–transformada de Fourier de

$$\hat{w}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{a}{\xi^2+a^2}\cdot e^{-t\xi^2} \equiv \hat{h}(\xi)\cdot\hat{g}(t,\xi)$$

é, pelo teorema da convolução: $\widehat{h*g} = \sqrt{2\pi}\hat{h}\cdot\hat{g}$ *e dado que* $\hat{g}(t,\xi) = e^{-\xi^2 t}$ *é a transformada de Fourier de* $g(t,x) = \left(1/\sqrt{2t}\right)e^{-x^2/4t}$,

$$\begin{aligned} w(t,x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}h*g(t,x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-(x-y)^2/(4t)}e^{-a|y|}dy \end{aligned}$$

de onde se conclui

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{h}(\xi)e^{a^2 t} - \hat{h}(\xi)\hat{g}(t,\xi)$$

e

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= \left(\hat{u}(t,\cdot)\right)^{\vee}(x) \\
&= \left(\hat{h}(\cdot)e^{a^2 t} - \hat{w}(t,\cdot)\right)^{\vee}(x) \\
&= h(x)e^{a^2 t} - w(t,x) \\
&= e^{-a|x|+a^2 t} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-(x-y)^2/(4t)} e^{-a|y|} dy \ .
\end{aligned}
$$