Segunda Prova de Física Matemática I

(Equações a Derivadas Parciais e Transformada de Fourier)

IFUSP - 7 Dezembro 2015 - 10:00 / 12:30 hs

Exercício 1 (Valor 3.0) *Calcule a transformada de Fourier de*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\left(1 - \dfrac{|x|}{2a}\right) & \text{se} \quad |x| \le 2a \\ 0 & \text{se} \quad |x| > 2a \end{cases}$$

e utilize este resultado juntamente com o Teorema de Plancherel–Parseval para obter a igualdade

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin a\xi}{\xi}\right)^4 d\xi = \frac{2}{3}\pi a^3 \,.$$

Exercício 2 (Valor 3.5) *Considere o problema de Cauchy (PVIF) para o movimento de uma corda elástica semi–infinita ($u(t,x)$ é o deslocamento transversal instantâneo da corda no ponto x, com respeito ao equilíbrio):*

$$\frac{1}{v^2}u_{tt} - u_{xx} = 0\,, \qquad t > 0\,,\, x > 0,$$

com a extremidade fixa na posição de equilíbrio, $u(t,0) = 0$, $t > 0$, e dados iniciais

$$u(0,x) = \sin x \qquad \text{e} \qquad u_t(0,x) = e^{-x}\,, \qquad x > 0\ .$$

(a) *Calcule o deslocamento $u(t,x)$ da corda em cada instante $t > 0$ e cada ponto $x > 0$.* ***(b)*** *A solução encontrada quando estendida para $x \in \mathbb{R}$ possui paridade? Qual? Comente a sua resposta.*

Indicação: *Utilize a solução geral: $u(t,x) = F(x+vt) + G(x-vt)$ para $x - vt \ge 0$ e $x - vt < 0$, juntamente com a condição de fronteira no segundo caso.*

Exercício 3 (Valor 3.5) *Use a transformada de Fourier para resolver o seguinte problema de condução de calor:*

$$u_t - u_{xx} = e^{a^2 t} f(x)\ , \qquad t > 0\ ,\ x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

sujeita a condição inicial

$$u(0,x) = 0\ , \qquad x \in \mathbb{R}$$

com $f(x)$ a função cuja transformada de Fourier $\hat{f}(\xi)$ é constante igual a $\sqrt{2/\pi}a > 0$ (mesma constante a da dependência temporal no lado direito de (1)).

Indicação: *$\hat{g}(\xi) = e^{-\xi^2 t}$ é a transformada de Fourier de $g(x) = e^{-x^2/4t}/\sqrt{2t}$ e $\hat{h}(\xi) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\dfrac{a}{\xi^2 + a^2}$ é a transformada de Fourier de $h(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$.*