Prova de Recuperação e Substitutiva de Física Matemática I – Soluções

(Séries e Transformadas de Fourier em Equações a Derivadas Parciais)

IFUSP - 20 de Janeiro de 2016

Exercício 1 (Valor 0.75) *Se $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função 2π–periódica, ímpar e tal que $f(x) = k + lx$ em $(0, \pi)$, então sua série de Fourier é*

$$Sf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

com

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (k + lx) \sin nx dx \\ &= \frac{-2}{\pi n} \left((k + lx) \cos nx|_0^{\pi} - l \int_0^{\pi} \cos nx dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi n} \left(k - (k + l\pi) \cos n\pi + \frac{l}{n} \sin nx|_0^{\pi} \right) \\ &= \frac{2k}{\pi n} (1 - (-1)^n) - \frac{2l}{n} (-1)^n \quad . \end{aligned} \tag{1}$$

Exercício 2 (Valor 1.75) *A solução geral da equação $\ddot{c} + n^2 c = \gamma e^{-t}$ com $c(0) = \alpha$ e $\dot{c}(0) = \beta$, dado que $\cos nx$ e $\sin nx$ são soluções L.I. da equação homogênea, é da forma*

$$c(t) = a \cos nt + b \frac{\sin nt}{n} + A e^{-t} \tag{2}$$

onde a, b e A devem ser determinados em termos de α, β, γ e n. (2) substituida na equação, conduz a

$$A(1 + n^2) e^{-t} = \gamma e^{-t}$$

determinando

$$A = \frac{\gamma}{1 + n^2} \ .$$

Consequentemente, Ae^{-t} é uma solução particular da equação,

$$c(t) = a \cos nt + b \frac{\sin nt}{n} + \frac{\gamma}{1 + n^2} \ e^{-t}$$

e

$$\dot{c}(t) = -an \sin nt + b \cos nt - \frac{\gamma}{1 + n^2} \ e^{-t} \ .$$

Impondo os dados iniciais

$$\begin{aligned} c(0) &= a + \frac{\gamma}{1+n^2} = \alpha \\ \dot{c}(0) &= b - \frac{\gamma}{1+n^2} = \beta \end{aligned}$$

determinamos

$$\begin{aligned} a &= \alpha - \frac{\gamma}{1+n^2} \ , \\ b &= \beta + \frac{\gamma}{1+n^2} \end{aligned}$$

e a solução do problema

$$c(t) = \left(\alpha - \frac{\gamma}{1+n^2}\right)\cos nt + \left(\beta + \frac{\gamma}{1+n^2}\right)\frac{\sin nt}{n} + \frac{\gamma}{1+n^2}\ e^{-t} \ . \tag{3}$$

Exercício 3 (Valor 3.5) *Considere o PVIF:*

$$u_{tt} - u_{xx} = 0\,, \qquad t > 0\,,\ 0 < x < \pi \tag{4}$$

com

$$u(t,0) = e^{-t}\,, \qquad u(t,\pi) = 1\,, \quad t > 0 \tag{5}$$

e

$$u(0,x) = u_t(0,x) = 0\ , \qquad 0 < x < \pi\ . \tag{6}$$

Escrevendo

$$u(t,x) = v(t,x) + w(t,x) \tag{7}$$

onde

$$v(t,x) = \frac{x}{\pi} + \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)e^{-t} \tag{8}$$

é a interpolação linear dos valores de u na fronteira do intervalo $(0,\pi)$, temos

$$\begin{aligned} u_t &= v_t + w_t = -\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)e^{-t} + w_t \\ u_{tt} &= v_{tt} + w_{tt} = \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)e^{-t} + w_{tt} \\ u_{xx} &= v_{xx} + w_{xx} = w_{xx} \end{aligned}$$

que juntamente com as equações (4), (5) e (6) substitui o PVIF original para u por outro PVIF para w:

$$\begin{aligned} w_{tt} - w_{xx} &= \left(\frac{x}{\pi} - 1\right)e^{-t}\ , \qquad t > 0\,,\ 0 < x < \pi \\ w(t,0) &= w(t,\pi) = 0\ , \qquad t > 0 \end{aligned} \tag{9}$$

com os dados iniciais

$$\begin{aligned} w(0,x) &= -1 \\ w_t(0,x) &= \left(1-\frac{x}{\pi}\right), \qquad 0<x<\pi \ . \end{aligned} \tag{10}$$

Uma solução das equações (9) e (10), pelo método da variação dos parâmetros, é da forma

$$w(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\sin nx \tag{11}$$

onde os c_n, substituindo (11) em (9), juntamente com a expansão

$$\left(\frac{x}{\pi}-1\right)e^{-t}=\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n e^{-t}\sin nx \ ,$$

satisfazem a equação

$$\ddot{c}_n+n^2c_n=\gamma_n e^{-t}$$

com ($k=-1$ e $l=1/\pi$ na eq. (1))

$$\gamma_n=\frac{-2}{\pi n}$$

e dados iniciais ($k=-1$ e $l=0$ e, respectivamente, $k=1$ e $l=-1/\pi$)

$$\begin{aligned} c_n(0) &= \alpha_n=\frac{-2}{\pi n}(1-(-1)^n) \\ \dot{c}_n(0) &= \beta_n=\frac{2}{\pi n} \end{aligned}$$

cuja solução pode ser lida de (3) no Problema 2:

$$\begin{aligned} c_n(t) &= \frac{-2}{\pi n}\left(1-(-1)^n-\frac{1}{1+n^2}\right)\cos nt+\frac{2}{\pi n^2}\left(1-\frac{1}{1+n^2}\right)\sin nt-\frac{2}{\pi n}\frac{1}{1+n^2}e^{-t} \\ &= \frac{2}{\pi n}\frac{1}{1+n^2}\left(\left((-1)^n\left(1+n^2\right)-n^2\right)\cos nt+n\sin nt-e^{-t}\right) \end{aligned} \tag{12}$$

A solução do PVIF original é, por (7), (8), (11) e (12),

$$u(t,x)=\frac{x}{\pi}+\left(1-\frac{x}{\pi}\right)e^{-t}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(1+n^2)}\left(\left((-1)^n\left(1+n^2\right)-n^2\right)\cos nt+n\sin nt-e^{-t}\right)\sin nx \ .$$

Exercício 4 (Valor 4.0) *Considere o PVI*

$$\frac{1}{v^2}u_{tt}-u_{xx}=h(t,x) \ , \qquad t>0 \ , \ -\infty<x<\infty \tag{13}$$

sujeita as condições iniciais $u(0,x)=u_t(0,x)=0$, que rege o movimento de uma corda vibrante infinita forçada.

(a) *Se* $\hat{\chi}_b(\xi)$ *denota a transformada de Fourier da função* $\chi_b(x) = \sqrt{\pi/2}$ *se* $|x| \le b$ *e* $\chi_b(x) = 0$ *se* $|x| > b$*, então*

$$\begin{aligned}
\hat{\chi}_b(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x)\ e^{-i\xi x}\ dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-b}^{b} e^{-i\xi x}\ dx \\
&= \frac{1}{\xi} \frac{e^{-i\xi b} - e^{-i\xi b}}{-2i} \\
&= \frac{\sin b\xi}{\xi}\ .
\end{aligned}$$

(b) *Para verificar que*

$$U(t) = \int_0^t \frac{\sin b(t-\tau)}{b} H(\tau) d\tau \tag{14}$$

satisfaz $U'' + b^2 U = H$ *com* $U(0) = U'(0) = 0$*, usamos o teorema fundamental do cálculo:* $\left(\int_a^t f(\tau) d\tau \right)' = f(t)$ *juntamente com a regra de Leibnitz:* $(fg)' = f'g + fg'$*.*[1] *Diferenciando (14) duas vezes, seguidamente,*

$$\begin{aligned}
U'(t) &= \left. \frac{\sin b(t-\tau)}{b} H(\tau) \right|_{\tau=t} + \int_0^t \cos b(t-\tau) H(\tau) d\tau \\
&= \int_0^t \cos b(t-\tau) H(\tau) d\tau
\end{aligned} \tag{15}$$

e

$$\begin{aligned}
U''(t) &= \cos b(t-\tau) H(\tau)|_{\tau=t} - b \int_0^t \sin b(t-\tau) H(\tau) d\tau \\
&= H(t) - b^2 U(t)\ ,
\end{aligned} \tag{16}$$

obtemos a equação desejada.

Supondo H *uma função contínua, os integrandos nas expressões (14) e (15) são funções contínuas de* τ *e as integrais sobre* $[0,t]$ *convergem para* 0 *quando* t *tende para* 0*. Logo, (14) satisfaz* ***(i)*** *a equação diferencial não–homogênea de segunda ordem (16) e* ***(ii)*** *os dados iniciais* $U(0) = U'(0) = 0$*.*

(c) *O método da transformada de Fourier (na variável espacial), juntamente com os ítens* ***(a)*** *e* ***(b)****, será utilizado para deduzir a solução*

$$u(t,x) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} h(\tau, y)\ d\tau dy$$

[1] Note que (14) pode se escrita como $U(t) = \left(\sin bt \int_0^t \cos b\tau H(\tau) d\tau - \cos bt \int_0^t \sin b\tau H(\tau) d\tau \right) / b$ e cada um dos termos tem a forma $f(t)g(t)$.

do PVI, equação (13), onde $\Omega = \Omega(t,x)$ é o interior da região triangular no plano tempo $\times$ espaço com vértices $A = (t,x)$, $B = (0, x-t)$ e $C = (0, x+t)$.

Denotando por $\hat{u} = \hat{u}(t,\xi)$ a transformada de Fourier da solução $u(t,x)$ do PVI

$$\hat{u}(t,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)\ e^{-i\xi x}\ dx$$

e usando as propriedades de linearidade da transformada de Fourier e das derivadas com respeito a x

$$\widehat{u_{xx}} = i\xi \widehat{u_x} = -\xi^2 \hat{u}$$

e com respeito a t

$$\widehat{u_{tt}} = \hat{u}_{tt}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \hat{h} &= v^{-2}\widehat{u_{tt} - u_{xx}} \\ &= v^{-2}\hat{u}_{tt} + \xi^2 \hat{u} \end{aligned} \tag{17}$$

*com $\hat{u}(0,\xi) = \hat{u}_t(0,\xi) = 0$, cuja solução, ao comparar (17) com (16): $U = \hat{u}$, $b = v\xi$ e $H = v^2\hat{h}$, é dada pela equação (14) do ítem **(b)**:*

$$\begin{aligned} \hat{u}(t,\xi) &= v^2 \int_0^t \frac{\sin v\xi(t-\tau)}{v\xi} \hat{h}(\tau,\xi) d\tau \\ &= v \int_0^t \hat{\chi}_{v(t-\tau)}(\xi) \hat{h}(\tau,\xi) d\tau\ . \end{aligned} \tag{18}$$

*Na segunda linha usamos o resultado do ítem **(a)** com $b = v(t-\tau)$.*

Para obter a solução do PVI original, faremos uso dos teoremas da convolução e fórmula da inversa. Supondo que a ordem da anti–transformada de Fourier e a integral em (18) possa ser trocada,[2] temos

$$\begin{aligned} u(t,x) &= (\hat{u})^{\vee}(t,x) \\ &= v \int_0^t \left(\hat{\chi}_{v(t-\tau)}(\cdot) \hat{h}(\tau,\cdot) \right)^{\vee} d\tau \\ &= v \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\chi_{v(t-\tau)} * h \right)(\tau,x) d\tau \\ &= \frac{v}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{v(t-\tau)}(x-y) h(\tau,y) dy d\tau \\ &= \frac{v}{2} \int_0^t \int_{x-v(t-\tau)}^{x+v(t-\tau)} h(\tau,y) dy d\tau \end{aligned}$$

[2]Para aplicar o teorema de Fubini é suficiente que $\hat{h}(t,\xi)$ seja uniformemente contínua em t e ξ.

que é justamente a integral sobre a região triangular $\Omega = \Omega(t,x)$ de vértices A, B e C. Na última igualdade usamos as equivalências: $|x-y| \leq v(t-\tau) \iff -v(t-\tau) \leq y-x \leq v(t-\tau) \iff x-v(t-\tau) \leq y \leq x+v(t-\tau)$.

(d) *Para $h(t,x) = \cos 2\pi\omega t$, temos*

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{v}{2}\int_0^t \cos 2\pi\omega\tau \left(\int_{x-v(t-\tau)}^{x+v(t-\tau)} 1 \; dy\right) d\tau \\ &= v^2 \int_0^t (t-\tau)\cos 2\pi\omega\tau \; d\tau \\ &= v^2 \left((t-\tau)\frac{\sin 2\pi\omega\tau}{2\pi\omega}\bigg|_0^t + \int_0^t \frac{\sin 2\pi\omega\tau}{2\pi\omega} \; d\tau \right) \\ &= \frac{v^2}{4\pi^2\omega^2}\left(1-\cos 2\pi\omega t\right) \; . \end{aligned}$$

Note que a solução independe de x (todos os pontos da corda movem juntamente) e satisfaz $u(0,x) = u_t(0,t) = 0$.