Prova de Recuperação e Substitutiva de Física Matemática I

(Séries e Transformadas de Fourier em Equações a Derivadas Parciais)

IFUSP - 20 de Janeiro de 2016 - 10:00 / 12:30 h

Problema 1 (Valor 0.75) *Escreva a série de Fourier da função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 2π–periódica, ímpar e tal que*

$$f(x) = \alpha + \beta x \ , \qquad 0 < x < \pi \ .$$

Problema 2 (Valor 1.75) *Seja α, β e γ números reais e n um inteiro. Encontre a solução $c = c(t)$ da equação diferencial ordinária*

$$\ddot{c} + n^2 c = \gamma e^{-t}, \qquad\qquad t > 0,$$

que satisfaz $c(0) = \alpha$ e $\dot{c}(0) = \beta$. Para isso, escreva

$$c(t) = a \cos nt + b \frac{\sin nt}{n} + A e^{-t} = c^{\mathrm{hom}}(t) + c^{\mathrm{part}}(t)$$

e resolva para A, a e b em termos de α, β, γ e n.

Problema 3 (Valor 3.5) *Determine a solução do PVIF não-homogêneo pelo método de variação dos parâmetros:*

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \,, \qquad t > 0 \,, \, 0 < x < \pi$$

com

$$u(t, 0) = e^{-t} \,, \qquad u(t, \pi) = 1 \,, \quad t > 0$$

e

$$u(0, x) = u_t(0, x) = 0 \ , \qquad 0 < x < \pi \ .$$

Roteiro: Escreva a solução do PVIF original $u(t, x) = v(t, x) + w(t, x)$ onde w satisfaz um PVIF com condições de fronteira homogêneas. Resolva o novo PVIF para $w(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin nx$ com os c_n determinados com o auxílio dos Exercícios 1 e 2.

Problema 4 (Valor 4.0) ***(a)*** *Calcule a transformada de Fourier $\hat{\chi}_b(\xi)$ da função $\chi_b(x) = \sqrt{\pi/2}$ se $|x| \leq b$ e $\chi_b(x) = 0$ se $|x| > b$.* ***(b)*** *Verifique que*

$$U(t) = \int_0^t \frac{\sin b(t - s)}{b} \ H(s) \ ds$$

satisfaz $U'' + b^2 U = H$ com $U(0) = U'(0) = 0$. ***(c)*** *Utilize a transformada de Fourier (na variável x), juntamente com os ítens* ***(a)*** *e* ***(b)****, para obter a solução*

$$u(t, x) = \frac{v}{2} \int_0^t \int_{x - v(t-\tau)}^{x + v(t-\tau)} h(\tau, y) dy d\tau$$

do PVI de uma corda elástica infinita forçada:

$$\frac{1}{v^2} u_{tt} - u_{xx} = h(t, x) \ , \qquad t > 0 \ , \ x \in \mathbb{R}$$

com $u(0, x) = u_t(0, x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. ***(d)*** *Calcule a solução do problema para $h(t, x) = \cos 2\pi\omega t$.*