Primeira Lista de Exercícios de Física Matemática I – Soluções

(Equação a Derivadas Parciais de Laplace e Problemas de Valor de Fronteira)

IFUSP - 17 Março 2015

Exercício 1 *Considere a equação de Laplace* $u_{xx}+u_{yy}=0$ *em* $R=\{(x,y):0<x<\pi,0<y<2\}$ *sujeita às condições* $u_x(0,y)=u_x(\pi,y)=0$, $0<y<2$ *e* $u(x,0)=0$, $0\le x\le\pi$.

1. *As funções* $u_0(x,y)=y$ *e* $u_n(x,y)=\cos nx\,\sinh ny$, $n=1,\,2,\,\ldots$, *satisfazem estas equações, visto que*
$$(u_0)_{xx}=(u_0)_{yy}=0\ , \qquad \text{em } R$$
e $u_0(x,0)\equiv 0$ *e* $(u_0)_x(x,y)\equiv 0$ *garantem as condições nas fronteiras* $x=0$, $x=\pi$ *e* $y=0$; *para todo* $n\in\mathbb{N}$,
$$(u_n)_{xx}=-n^2u_n=-(u_n)_{yy}\ , \qquad \text{em } R\ ,$$
$u_n(x,0)\equiv 0$ *e*
$$(u_n)_x(x,y)=-n\sin nx\,\sinh ny=0\ ,$$
identicamente se $x\in\{0,\pi\}$, *concluindo a verificação.*

2. *Por linearidade das operações diferenciais e ítem 1., a combinação linear*
$$u(x,y)=A_0\,u_0(x,y)+\sum_{n=1}^{N}A_n\,u_n(x,y),$$
com $N\in\mathbb{N}$ *qualquer, satisfaz a equação de Laplace*
$$\begin{aligned} u_{xx} &= A_0\,(u_0)_{xx}+\sum_{n=1}^{N}A_n\,(u_n)_{xx} \\ &= -\sum_{n=1}^{N}A_n\,(u_n)_{yy}=-u_{yy}\ , \end{aligned}$$
em R *e condições de fronteira*
$$\begin{aligned} u(x,0) &= A_0\ u_0(x,0)+\sum_{n=1}^{N}A_n\,u_n(x,0)=0\ , \qquad x\in[0,\pi] \\ u_x(0,y) &= A_0\ (u_0)_x(0,y)+\sum_{n=1}^{N}A_n\ (u_n)_x(0,y)=0 \qquad \text{e} \\ u_x(\pi,y) &= A_0\ (u_0)_x(\pi,y)+\sum_{n=1}^{N}A_n\ (u_n)_x(\pi,y)=0\ , \qquad y\in(0,2)\ . \end{aligned}$$

Em particular, $u(x,y)$ satisfaz em $y=2$,

$$u(x,2) = B_0 + \sum_{n=1}^{N} B_n \cos nx$$

com

$$\begin{aligned} B_0 &= 2A_0 \\ B_n &= A_n \sinh 2n \ , \qquad n = 1,2,\dots \ . \end{aligned} \tag{1}$$

Para encontrar os coeficientes $\{A_j\}_{j=0}^N$ tais que se verifique

$$u(x,2) = 4 + 3\cos x - \cos 2x \, , \qquad x \in (0,\pi) \tag{2}$$

faremos uso da independência linear do conjunto de funções, 1, $\cos nx$, $n = 1,\dots,N$, no intervalo $[0,\pi]$. Estas funções geram (por combinações lineares) um espaço vetorial $\mathcal{P}_N^{\text{par}}$ dos polinômios trigonométricos pares de ordem menores ou igual a N, de dimensão $N+1$. Como o lado direito da igualdade (2), $p(x) = 4 + 3\cos x - \cos 2x$, é um polinômio par de ordem 2, basta tomar $N=2$. De fato, a condição (2) escrita como uma equação em $\mathcal{P}_N^{\text{par}}$

$$u(x,2) - p(x) = (B_0 - 4) + (B_1 - 3)\cos x + (B_2 + 1)\cos 2x + \sum_{n=3}^{N} B_n \cos nx = 0, \tag{3}$$

para $x \in (0,\pi)$, é satisfeita apenas pelo polinômio identicamente nulo. Determinamos em $\mathcal{P}_2^{\text{par}}$ os coeficientes B_0, B_1 e B_2, fixando apenas três pontos 0, $\pi/2$ e π em $[0,\pi]$:

$$\begin{aligned} u(0,2) - p(0) &= B_0 + B_1 + B_2 - 6 = 0 \\ u(\pi/2,2) - p(\pi/2) &= B_0 - B_2 - 5 = 0 \\ u(\pi,2) - p(\pi) &= B_0 - B_1 + B_2 = 0 \end{aligned}$$

cuja solução é $B_0 = 4$, $B_1 = 3$ e $B_2 = -1$,[1] de onde concluímos, por (1): $A_0 = 2$, $A_1 = 3/\sinh 2$, $A_2 = -1/\sinh 4$ e $A_n = 0$ para $3 \le n \le N$.

3. *O método de Fourier de separação de variaveis consiste em procurar soluções das equações homogêneas $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $u_x(0,y) = u_x(\pi,y) = 0$ e $u(x,0) = 0$ na forma produto*

$$u(x,y) = X(x)Y(y) \ . \tag{4}$$

Substituindo na equação de Laplace, obtemos

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \sigma = -\lambda^2$$

com λ real, e a equação à derivadas parciais (juntamente com as condições de fronteira) é reduzida a um par de equações diferenciais ordinárias:

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \ , \qquad 0 < x < \pi \tag{5}$$

[1] Esta solução pode ser lida diretamente da equação (3), igualando a zeros os coeficientes desta expansão trigonométrica. Observe que a ortogonalidade não é necessária para determinação dos coeficientes.

com $X'(0) = X'(\pi) = 0$ *e*

$$Y'' - \lambda^2 Y = 0 \ , \qquad 0 < y < 2 \tag{6}$$

com $Y(0) = 0$. *Resolvemos primeiramente o problema de autovalores: encontrar todas as soluções da equação (5) sujeita as condições nas duas extremidades do intervalo* $(0, \pi)$. *A solução geral de (5)*

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$$

juntamente com

$$\begin{aligned} X'(0) &= \lambda B = 0 \\ X'(\pi) &= \lambda A \sin \lambda \pi = 0 \end{aligned}$$

determinam os pares de autovalores/autofunções do problema:[2] *para* $\lambda = 0$ *temos* $X_0(x) = 1$ *e para* $\lambda = n \in \mathbb{N}$ *temos* $X_n(x) = \cos nx$. *A solução geral da equação (6)*

$$Y(y) = \begin{cases} Cy + D & se \quad \lambda = 0 \\ C \sinh \lambda y + D \cosh \lambda y & se \quad \lambda \neq 0 \end{cases}$$

com

$$Y(0) = D = 0$$

e o produto (4) reproduz, tomando as constantes iguais a 1, *a coleção de soluções das equações homogêneas sugerida no ítem* 1*:*

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= y \\ u_n(x, y) &= \cos nx \ \sinh ny \ , \qquad n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

A resolução das equações em $\bar{R} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 2\}$, *incluindo a condição não homogênea na fronteira* $y = 2$, *segue do ítem* 2.

Exercício 2 *Como no exercício anterior, os autovalores e autofunções correspondentes ao problemas de fronteira são:*

1. *A solução geral de* $X'' + \lambda^2 X = 0$

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x \tag{7}$$

em $(0, L)$ *com*

$$\begin{aligned} X(0) &= A = 0 \\ X'(L) &= \lambda \cos \lambda L = 0 \end{aligned}$$

resulta em $\lambda_n = (n - 1/2)\, \pi / L$, $n = 1, 2, \ldots,$ *e*

$$X_n = \sin \frac{(2n-1)\pi}{2L} x \ .$$

[2] Como as equações são homogêneas, as autofunções são determinadas a menos de uma constante multiplicativa, a qual fixamos, por simplicidade, igual a 1.

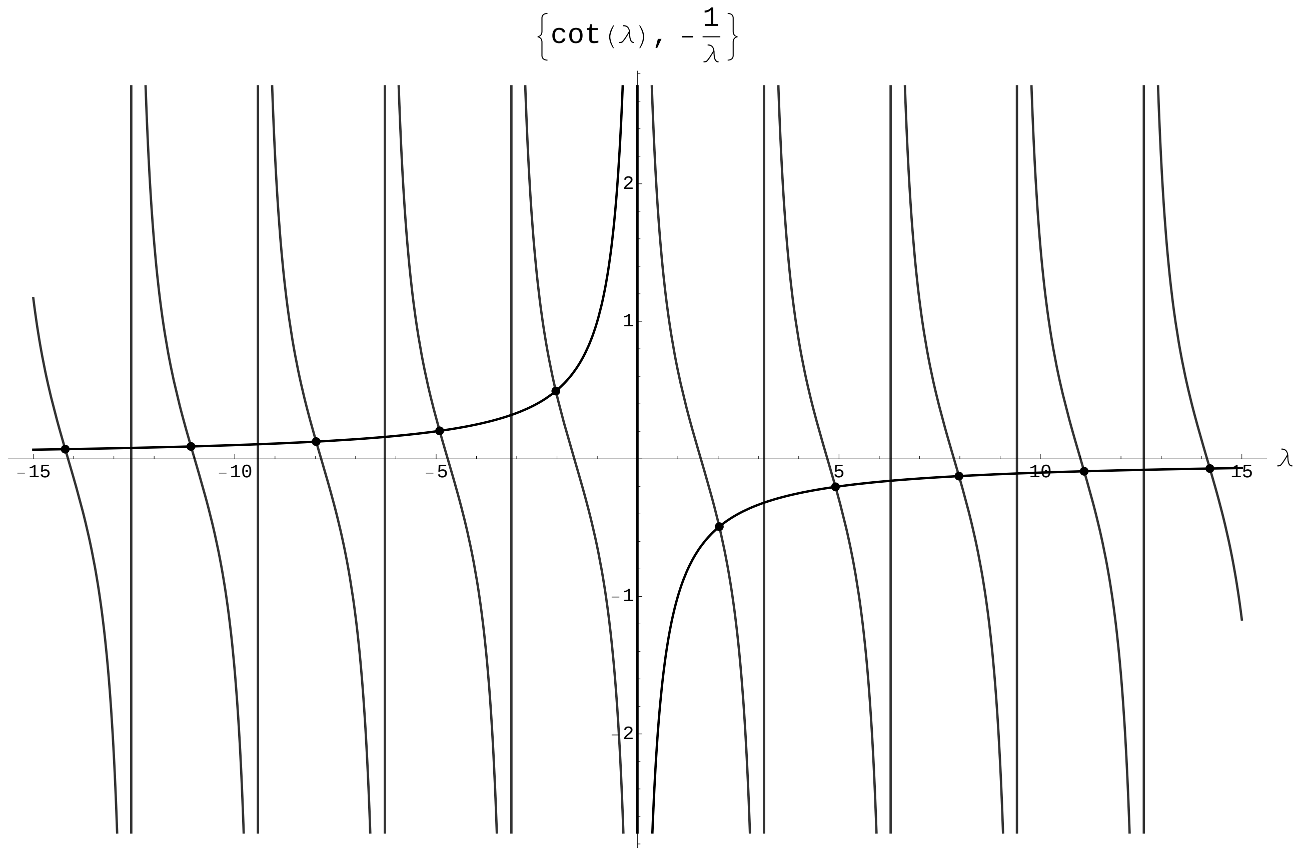

Figure 1: As coordenadas dos pontos de intesecção das curvas $\cot\lambda$ e $-1/\lambda$, são os autovalores do problema de fronteira do ítem 3 com $h = 1$

2. *A solução geral (7) de $X'' + \lambda^2 X = 0$ em $(-\pi, \pi)$ sujeita a*

$$\begin{aligned} X(\pi) - X(-\pi) &= 2B\sin\lambda\pi = 0 \\ X'(\pi) - X'(-\pi) &= -2\lambda A\sin\lambda\pi = 0 \end{aligned}$$

resulta em: para $\lambda = 0$ temos $X_0 = 1$ e para cada $\lambda_n = n$, $n = 1, 2, \ldots$, temos duas autofunções L.I. correspondentes

$$\begin{aligned} X_n^{(\mathrm{par})}(x) &= \cos nx \qquad (B = 0) \\ X_n^{(\mathrm{impar})}(x) &= \sin nx \qquad (A = 0)\ . \end{aligned}$$

3. *A solução geral (7) de $X'' + \lambda^2 X = 0$ em $(0, 1)$ satisfazendo*

$$\begin{aligned} X(0) &= A = 0 \\ X'(1) + hX(1) &= B\left(\lambda\cos\lambda + h\sin\lambda\right) = 0 \end{aligned}$$

resulta em uma equação transcendental para os autovalores

$$\cot\lambda = -\frac{h}{\lambda}$$

cuja solução gráfica é dada pela intersecção das curvas $\cot\lambda$ *e as hipérboles* $-h/\lambda$ *(*$h = 1$ *na figura). Se* λ_n*,* $n = 1, 2, \ldots$*, enumera os autovalores positivos em ordem crescente, temos (numéricamente)* $\lambda_1 = 2.0287578$*,* $\lambda_2 = 4.9131804$*,* $\lambda_3 = 7.9786657$*,* $\lambda_4 = 11.0855384$*,* $\lambda_5 = 14.2074367$ *e* $\lambda_n \sim (n-1/2)\pi$ *assintóticamente quando* n *tende a* ∞*, e autofunções associadas*

$$X_n(x) = \sin\lambda_n x.$$