

Primeira Lista de Exercícios de Física Matemática I

(Equação a Derivadas Parciais de Laplace e Problemas de Valor de Fronteira)

IFUSP - Fevereiro 2015

Exercício 1 Considere a equação de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (1)$$

no domínio retangular $R = \{(x, y) : 0 < x < \pi, 0 < y < 2\}$ sujeita às condições de fronteira

$$u_x(0, y) = u_x(\pi, y) = 0, \quad (2)$$

para $0 < y < 2$ e

$$u(x, 0) = 0 \quad (3)$$

para $0 < x < \pi$.

1. Mostre que as funções $u_0(x, y) = y$ e $u_n(x, y) = \cos nx \sinh ny$, $n = 1, 2, \dots$, satisfazem as três equações acima.
2. Verifique que a combinação linear

$$u(x, y) = A_0 y + \sum_{n=1}^N A_n \cos nx \sinh ny, \quad (4)$$

com $N \geq 1$ um inteiro qualquer, satisfaz a equação diferencial (1) com as mesmas condições de fronteira e encontre os coeficientes $\{A_j\}_{j=0}^N$ tais que também se verifique a condição não homogênia de fronteira

$$u(x, 2) = 4 + 3 \cos x - \cos 2x, \quad 0 < x < \pi. \quad (5)$$

3. Resolva o problema de valores de fronteira dado pelas equações (1), (2), (3) e (5) acima, utilizando o método de Fourier de separação de variáveis.

Exercício 2 Encontre os autovalores e as autofunções correspondentes dos seguintes problemas de fronteira:

1. $X'' + \lambda^2 X = 0$, $X(0) = X'(L) = 0$;
2. $X'' + \lambda^2 X = 0$, $X(\pi) = X(-\pi)$ e $X'(\pi) = X'(-\pi)$;
3. $X'' + \lambda^2 X = 0$, $X(0) = 0$ e $X'(1) + hX(1) = 0$.

Indicação. Represente graficamente a solução da equação transcendental satisfeita pelos autovalores do item 3.