Segunda Lista de Exercícios de Física Matemática I – Soluções

(Séries de Fourier)

IFUSP - 27 Março 2015

Exercício 1 ***(i)*** *Vamos calcular a série de Fourier de uma função* $f(x) = \exp(x/2\pi)$ *em* $x \in (-\pi, \pi)$, 2π*–periódica. Os coeficientes de Fourier de* f *para* $n \neq 0$ *são dados por*

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x/2\pi - inx} dx \\ &= \frac{1}{1-2\pi i n}\left(e^{1/2 - in\pi} - e^{-1/2+in\pi}\right) \\ &= \frac{1}{1-2\pi i n}\left(e^{1/2}(\cos n\pi - i\sin n\pi) - e^{-1/2}(\cos n\pi + i \sin n\pi)\right) \\ &= \frac{2\cos n\pi}{1-2\pi i n}\sinh 1/2 \ . \end{aligned}$$

Para $n = 0$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{x/2\pi} dx = 2\sinh 1/2 \ .$$

A série de Fourier de f *é, portanto,*

$$\begin{aligned} Sf(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{inx} + c_{-n}e^{-inx}\right) \\ &= 2\sinh 1/2 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{1}{1-2\pi i n}e^{inx} + \frac{1}{1+2\pi i n}e^{-inx}\right)\right) \\ &= 2\sinh 1/2 \left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+4\pi^2 n^2}\left(\cos nx - 2\pi n \sin nx\right)\right) \ . \end{aligned} \tag{1}$$

(ii) *Para* $x = \pi$ *a função* f *é discontínua e*

$$Sf(\pi) = \frac{f(\pi+0) + f(\pi-0)}{2} \ ,$$

pelo Teorema de Fourier, resulta em

$$\left(e^{1/2} - e^{-1/2}\right)\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+4\pi^2 n^2}\cos n\pi\right) = \frac{e^{1/2} + e^{-1/2}}{2}$$

de onde se conclui

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+4\pi^2 n^2} = \frac{1}{4}\frac{e^{1/2}+e^{-1/2}}{e^{1/2}-e^{-1/2}} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{3e^{-1/2}-e^{1/2}}{e^{1/2}-e^{-1/2}}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{3-e}{e-1} \; .$$

(iii) *Como $x=0$ é um ponto de continuidade para f, tomando $x=0$ em (1), resulta*

$$Sf(0) = \left(e^{1/2}-e^{-1/2}\right)\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+4\pi^2 n^2}\right) = 1 = f(0)$$

de onde se conclui

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+4\pi^2 n^2} = \frac{1}{2}\frac{1}{e^{1/2}-e^{-1/2}} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1-e^{1/2}+e^{-1/2}}{e^{1/2}-e^{-1/2}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{e^{1/2}-e+1}{e-1} \; .$$

Exercício 2 *Seja $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ uma função 2π–periódica tal que*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0 \le t < h \\ 0 & \text{se} \quad h < t < 2\pi \end{cases} ,$$

onde $h \in (0, 2\pi)$ é uma constante. Os coeficientes de Fourier de f no intervalo $[0,\, 2\pi]$ são dados por

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{h} e^{-int}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i n}\left(1-e^{-inh}\right) \; , \qquad n \neq 0$$

e

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt = \frac{h}{2\pi} \; .$$

A série de Fourier de f é, portanto,

$$
\begin{aligned}
Sf(x) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{int} + c_{-n} e^{-int} \right) \\
&= \frac{h}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2in} \left(1 - e^{-inh}\right) e^{int} - \frac{1}{2in} \left(1 - e^{inh}\right) e^{-int} \right) \\
&= \frac{h}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sin nt - \sin n(t-h) \right) \ .
\end{aligned}
$$