

Terceira Lista de Exercícios de Física Matemática I – Soluções

(Séries de Fourier e Problema de Valor Inicial e de Fronteira)

IFUSP - 13 Abril 2015

Exercício 1 1. Vamos calcular a série de Fourier da função $l(x) = (\pi - x)/2$ em $(0, \pi]$, ímpar, 2π -periódica. Os coeficientes de Fourier ímpar de l são dados por

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\pi - x}{2} \sin nx dx \\ &= \frac{-1}{\pi n} \left((\pi - x) \cos nx \Big|_0^\pi - \int_0^\pi \cos nx dx \right) = \frac{1}{n} \end{aligned}$$

para $n \geq 1$, por integração por partes, e a série de Fourier de l é, portanto,

$$\begin{aligned} Sl(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx . \end{aligned}$$

A igualdade

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx , \quad x \in (0, \pi] \quad (1)$$

é estabelecida pelo Teorema de Fourier. Note que¹

$$g(t, x) = l(x+t) - l(x) + l(x-t) - l(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < t \leq x \leq \pi \\ -\pi & \text{se } 0 < x < t \leq \pi \end{cases}$$

satisfaz o teste de Dini: $\int_0^\delta |g(t, x)|/t dt = 0$ se $0 < \delta \leq x$ e $= \pi \log(\delta/x) < \infty$ para todo $0 < x \leq \pi$ e $\delta > x$.

2. Integrando a igualdade termo a termo

$$\begin{aligned} L(x) &= \int_0^x \frac{\pi - x}{2} dx = \frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin nx dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (1 - \cos nx) = SL(x) \end{aligned} \quad (2)$$

em $(0, \pi]$ é uma função par, 2π -periódica. A igualdade $L(x) = SL(x)$ segue do Teorema sobre integração de séries de Fourier, aplicável às funções seccionalmente contínuas. Como

$$SL(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin nx , \quad (3)$$

¹Se $x < t$, então o argumento $x - t$ de l é negativo e $l(x - t) = -(\pi + x - t)/2$.

onde $A_n = -1/n^2$ e

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4} \right) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi x^2}{4} - \frac{x^3}{12} \right) \Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{3} , \end{aligned}$$

concluimos, por comparação de (2) e (3),

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nx \quad (4)$$

em $(0, \pi]$ é par e 2π -periódica e

3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{A_0}{2} = \frac{\pi^2}{6} .$$

4. Aplicando o Teorema sobre integração de séries de Fourier, temos

$$\begin{aligned} M(x) &= \int_0^x \left(L(y) - \frac{A_0}{2} \right) dy \\ &= \int_0^x \left(\frac{\pi y}{2} - \frac{y^2}{4} - \frac{\pi^2}{6} \right) dy \\ &= \frac{\pi x^2}{4} - \frac{x^3}{12} - \frac{\pi^2 x}{6} \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin nx . \end{aligned}$$

Integrando esta série termo a termo mais uma vez, obtemos a função

$$\begin{aligned} N(x) &= \int_0^x \left(\frac{\pi y^2}{4} - \frac{y^3}{12} - \frac{\pi^2 y}{6} \right) dy \\ &= \frac{\pi x^3}{12} - \frac{x^4}{48} - \frac{\pi^2 x^2}{12} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} (\cos nx - 1) = SN(x) \end{aligned} \quad (5)$$

em $(0, \pi)$, par e 2π -periódica. Consequentemente,

$$SN(x) = \tilde{A}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n \cos nx \quad (6)$$

com $\tilde{A}_n = 1/n^4$, $n \geq 1$, e

$$\tilde{A}_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\pi x^3}{12} - \frac{x^4}{48} - \frac{\pi^2 x^2}{12} \right) dx = \frac{\pi^4}{6} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{20} - \frac{1}{3} \right) = -\frac{\pi^4}{45} .$$

Comparando (6) e (5), concluímos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{-\tilde{A}_0}{2} = \frac{\pi^4}{90} .$$

5. Aplicando a identidade de Parseval para a função f em (4), temos

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)^2 dx &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{4} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi^4}{9} - \frac{2\pi^3}{3}x + \frac{3\pi^2}{3}x^2 - \pi x^3 + \frac{1}{4}x^4 \right) dx \\ &= \frac{\pi^4}{2} \left(\frac{1}{9} + \frac{4}{9} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{20} \right) \\ &= \frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \end{aligned}$$

verificando a relação obtida no item 4..

Exercício 2 Considere a equação para a condução do calor em uma barra unitária:

$$\frac{1}{\kappa} u_t - u_{xx} = 0 \quad (7)$$

em $R = \{(t, x) : t > 0, 0 < x < 1\}$ sujeita a condição de fronteira (isolante à esquerda, em contato com reservatório à temperatura nula à direita)

$$u_x(t, 0) = u(t, 1) = 0, \quad t > 0 \quad (8)$$

e inicial

$$u(0, x) = 1 - x^2, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (9)$$

O método de Fourier procura soluções das equações homogêneas (7) e (8) da forma

$$u(t, x) = T(t)X(x) \quad (10)$$

onde

$$T' + \kappa \lambda^2 T = 0 \quad (11)$$

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad (12)$$

com $X(0) = X(1) = 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ uma constante arbitrária. A segunda equação é o problema de autovalores: encontrar os valores próprios λ^2 e auto-funções $X(x) \neq 0$ correspondentes. A solução geral de (12) é

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$$

$$X'(x) = -A\lambda \sin \lambda x + \lambda B \cos \lambda x$$

Aplicando as condições de fronteiras

$$X'(0) = \lambda B = 0$$

$$X(1) = A \cos \lambda = 0$$

encontramos os autovalores e auto-funções do problema:

$$\lambda_n = (n - 1/2)\pi$$

$$X_n(x) = \cos(n - 1/2)\pi x, \quad n = 1, 2, \dots$$

Uma solução da equação (11) é

$$T(t) = e^{-\kappa \lambda^2 t}$$

e, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n(t, x) = e^{-\kappa(n-1/2)^2 t} \cos(n - 1/2)\pi x$$

é uma solução de (7) e (8) da forma (10). Pelo princípio de superposição, uma solução geral das equações homogêneas (7) e (8) é uma combinação linear destas soluções:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\kappa(n-1/2)^2 t} \cos(n - 1/2)\pi x \quad (13)$$

onde os a_n devem ser determinados pela condição inicial

$$u(0, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n - 1/2)\pi x = 1 - x^2, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (14)$$

Observe que o lado direito desta equação deve ser uma função, denominada $f(x)$, par e periódica de período $T = 4$. A paridade determina $f(x)$ no intervalo $(-1, 0)$ porém temos que determinar f em $(1, 2)$ também e, para isso, utilizaremos alguma simetria consistente com a condição de fronteira. Vamos refletir a função no eixo paralelo ao eixo das ordenadas em $x = 1$. Se refletíssemos simetricamente, o período da função reduziria para 2, não compatível com a solução do problema. Determinamos os coeficientes a_n refletindo f de forma antissimétrica em $x = 1$:

$$f(x) = -f(x - 2) = -1 + (x - 2)^2, \quad 1 < x < 2.$$

Note que é compatível com a condição de fronteira $f(1) = 0$ e com o período $T = 4$. De fato, esta determinação define uma função f contínua e 4-periódica, satisfazendo (14) (veja Fig. 1).

Os coeficientes $a_n = \tilde{a}_k$ de f devem se anular para $k = 2n$ e ser diferente de zero para $k = 2n - 1$, $n \in \mathbb{N}$ onde

$$\begin{aligned} \tilde{a}_k &= \frac{2}{2} \int_0^2 f(x) \cos k\pi x/2 \, dx \\ &= \int_0^1 (1 - x^2) \cos k\pi x/2 \, dx - \int_0^2 f(2 - x) \cos k\pi x/2 \, dx \end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de variável

$$y = 2 - x$$

$$dx = -dy$$

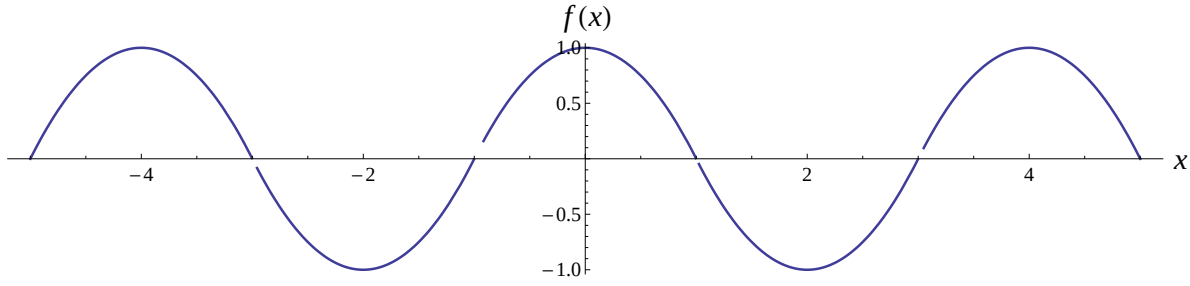


Figure 1: Função $f(x) = 1 - x^2$ se $0 < x < 1$, 4-periódica, simétrica com respeito a eixo $x = 0$ e anti-simétrica com respeito ao eixo $x = 1$

na segunda integral, juntamente com a identidade

$$\begin{aligned} \cos k\pi(2 - y)\pi/2 &= \cos k\pi \cos k\pi y/2 + \sin k\pi \sin k\pi y/2 \\ &= (-1)^k \cos k\pi y/2 \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{a}_k &= \int_0^1 (1 - x^2) \cos k\pi x/2 \, dx + \int_1^0 (1 - y^2) \cos k\pi(2 - y)\pi/2 \, dy \\ &= \left(1 - (-1)^k\right) \int_0^1 (1 - x^2) \cos k\pi x/2 \, dx, \end{aligned}$$

de onde se conclui, tomando $k\pi x/2 = (2n - 1)\pi x/2 = (n - 1/2)\pi x$, por integração por partes,

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_0^1 (1 - x^2) \cos(n - 1/2)\pi x \, dx \\ &= \frac{4}{(2n - 1)\pi} \left((1 - x^2) \sin(n - 1/2)\pi x \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 x \sin(n - 1/2)\pi x \, dx \right) \\ &= \frac{8}{(2n - 1)\pi} \int_0^1 x \sin(n - 1/2)\pi x \, dx \\ &= \frac{-16}{(2n - 1)^2 \pi^2} x \cos(n - 1/2)\pi x \Big|_0^1 - \int_0^1 \cos(n - 1/2)\pi x \, dx \\ &= \frac{-32}{(2n - 1)^3 \pi^3} \sin(n - 1/2)\pi x \Big|_0^1 \\ &= (-1)^{n+1} \frac{32}{(2n - 1)^3 \pi^3}. \end{aligned}$$

A função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no lado direito de (14) é uma função contínua e sua série de Fourier $S_n f(x)$ converge uniformemente para f pelo teste M de Weierstrass (a_n é somável em valor absoluto). Isso implica que a solução (13) é uniformemente convergente em $\bar{R}$ e, por consequente, contínua devido a continuidade de cada função $u_n(t, x)$ em $\bar{R}$.