Terceira Lista de Exercícios de Física Matemática I

(Séries de Fourier e Problema de Valor Inicial e de Fronteira)

IFUSP - Março 2015

Exercício 1 1. *A série de Fourier no lado direito da igualdade*

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx \,,$$

representa uma função impar, 2π–periódica, que coincide com a função no lado esquerdo da igualdade em $0 < x \leq \pi$, pelo Teorema de Fourier. Calcule os coeficientes b_n desta função.

2. *Integre os dois membros da igualdade acima a fim de obter uma função $f(x)$ tal que*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos nx \,.$$

Justifique a validade da integração termo a termo.

3. *Faça $x = 0$ e mostre que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \,.$$

4. *Utilize o teorema sobre integração de séries de Fourier por mais duas vezes sucessivas e mostre que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \,.$$

5. *Verifique este resultado por intermédio da identidade de Parseval.*

Exercício 2 *Determine a solução do seguinte problema de valor inicial e de fronteira pelo método de Fourier:*

$$\frac{1}{\kappa} u_t - u_{xx} = 0 \,,$$

no interior R do domínio $\bar{R} = \{(t, x) : t \geq 0,\ 0 \leq x \leq 1\}$, com condição de fronteira

$$u_x(t, 0) = u(t, 1) = 0 \,,$$

para $t > 0$ e condição inicial

$$u(0, x) = 1 - x^2 \,,$$

para $0 \leq x \leq 1$. A solução $u(t, x)$ é uma função contínua em $\bar{R}$?

Indicação: *Determine os coeficientes da solução em série a partir da série de Fourier em cossenos da função $1 - x^2$ em $0 \leq x < 1$ e $-1 + (x - 2)^2$ em $1 \leq x < 2$ com período fundamental $T = 4$.*