Quarta Lista de Exercícios de Física Matemática I – Soluções

(Núcleo de Dirichlet e Integral da Função Seno Cardinal)

IFUSP - 26 Abril 2015

Exercício 1 *1. Considere a seqüência numérica a_n, $n = 0, 1, \ldots$, dada por*

$$a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx \ . \tag{1}$$

(i) *Observamos, inicialmente, que $\sin x$ é uma função positiva no intervalo $(n\pi, (n+1)\pi)$ se n é par e negativa se n é ímpar, de modo que o sinal da seqüência $(a_n)_{n\geq 0}$, determinado pelo sinal de $\sin x$ neste intervalo, se alterna: $a_{2k} > 0$ e $a_{2k+1} < 0$, $k = 0, 1, \ldots$.* ***(ii)*** *Usando a desigualdade*

$$\frac{1}{(n+1)\pi} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n\pi} \ , \qquad x \in [n\pi, (n+1)\pi]$$

em (1), juntamente com

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin x = \cos n\pi - \cos(n+1)\pi = 2\cos n\pi = 2\,(-1)^n \ ,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{2}{(n+1)\pi} \ &\leq \ a_n \leq \frac{2}{n\pi} \ , \qquad \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{-2}{n\pi} \ &\leq \ a_n \leq \frac{-2}{(n+1)\pi}, \qquad \text{se } n \text{ é ímpar} \end{aligned} \tag{2}$$

e portanto,

$$\frac{2}{(n+1)\pi} \leq |a_n| \leq \frac{2}{n\pi}$$

decresce e tende a 0 quando $n \to \infty$.

2. Para mostrar que a integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{N\to\infty} \int_0^{N\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} a_n$$

converge vamos usar as quotas inferiores e superiores de a_n e a alternância de sinal da seqüência. Note que a série não converge absolutamente:

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \leq \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$$

uma vez que ambos os limites, inferior e superior, divergem logaritmicamente. Considere então a seqüência numérica $S = (A_N)_{N\geq 1}$ das somas parciais $A_N = \sum_{n=0}^{N-1} a_n$. Pelo critério de Cauchy, a seqüência S converge se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$ existir $N = N(\varepsilon)$ tal que

$$|A_q - A_p| = \left|\sum_{n=p}^{q-1} a_n\right| = |a_p + a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_{q-2} + a_{q-1}| < \varepsilon$$

para todo $p, q > N$, $p < q$. Se p e q forem pares, pela desigualdades (2), resulta

$$|A_q - A_p| \leq \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+2} + \frac{1}{p+2} + \cdots + \frac{1}{q-2} - \frac{1}{q}\right) < \frac{2}{\pi p} < \frac{2}{\pi N} \equiv \varepsilon$$

devido ao cancelamento par a par na primeira desigualdade, sobrando apenas $|A_q - A_p| \leq 2/\pi(1/p - 1/q)$ – a identidade define uma função $N(\varepsilon) := 2/(\pi\varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$; se p e q forem ímpares

$$\begin{aligned} |A_q - A_p| &= -a_p - a_{p+1} - a_{p+2} - \cdots - a_{q-2} - a_{q-1} \\ &\leq \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+2} + \frac{1}{p+2} + \cdots + \frac{1}{q-2} - \frac{1}{q}\right) < \frac{2}{\pi p} < \varepsilon \ ; \end{aligned}$$

a estimativa para os demais casos segue de maneira análoga, porém sem o termo $-2/(\pi q)$ na primeira desigualdade.

3. *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função π–periódica satisfazendo*

$$f(x) = \frac{x - \sin x}{x \sin x} \ , \qquad \text{se} \qquad x \in (-\pi/2, \pi/2]\backslash\{0\}$$

*e $f(0) = 0$. **(i)** Vamos mostrar que f é uma função contínua em $-\pi/2 < x \leq \pi/2$. Primeiramente, $f(x)$ é contínua para todo $x \in (-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$ pois x e $\sin x$ são funções contínuas e o denominador não se anula. O numerador e denominador se anulam em $x = 0$ e o limite é atingido por l'Hopital, aplicado duas vezes seguidas*

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x \sin x)'} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(\sin x + x \cos x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2\cos x - x \sin x} = 0 \ , \end{aligned}$$

*coincidindo com o valor atribuído para $f(0)$. Isso prova que f é contínua em $x = 0$ também, concluindo a prova. **(ii)** A função f é π–periódica, por definição. Portanto, por continuidade de f em $(-\pi/2, \pi/2]$,*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f(\pi/2 - \varepsilon) = \frac{\pi/2 - \sin \pi/2}{\pi/2 \sin \pi/2} = \frac{\pi - 2}{\pi}$$

e

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f(\pi/2 + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} f(-\pi/2 + \varepsilon) = \frac{-\pi/2 + \sin \pi/2}{\pi/2 \sin \pi/2} = -\frac{\pi - 2}{\pi}$$

implicam que $f(x)$ é descontinua em $x = \pi/2$:

$$\Delta(\pi/2) := \lim_{\varepsilon\to 0} f(\pi/2 - \varepsilon) - \lim_{\varepsilon\to 0} f(\pi/2 + \varepsilon) = 2\frac{\pi - 2}{\pi} > 0 \ .$$

Observamos, de passagem, que $f(x)$ é uma função ímpar, devendo se anular em $x = 0$ em vista de sua continuidade. Devido a sua periodicidade, $f(x)$ dá saltos nos múltiplos impares *de* $\pi/2$*:* $x_k = (k - 1/2)\pi$*,* $k \in \mathbb{N}$ *e, em particular, no ponto* $x_0 = -\pi/2$*.* ***(iii)*** *Como* f *é integrável e absolutamente integrável, pelo Lema de Riemann–Lebesgue (pág. 56 do texto "Análise de Fourier e EDPs"* de *Djairo G. de Figueiredo)*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) \ \sin(2N+1)x \ dx = 0 \tag{3}$$

4. *Para mostrar que a integral acima pode ser escrita como*

$$I_N = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} D_N(x) \ dx - \frac{1}{\pi} \int_{-(N+1/2)\pi}^{(N+1/2)\pi} \frac{\sin x}{x} dx \tag{4}$$

onde

$$D_N(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(2N+1)x}{\sin x}$$

é o núcleo de Dirichlet, fazemos a seguinte mudança de variável

$$\begin{aligned} x &= (2N+1)y \\ \frac{dx}{x} &= \frac{dy}{y} \end{aligned}$$

na segunda integral do lado direito de (4), que resulta em

$$\begin{aligned} I_N &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{\sin(2N+1)x}{\sin x} - \frac{\sin(2N+1)x}{x} \right) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{x - \sin x}{x \sin x} \sin(2N+1)x \right) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) \ \sin(2N+1)x \ dx \ , \end{aligned}$$

concluindo a demonstração.

5. *Uma das propriedades do núcleo de Dirichlet* $D_N(x)$ *é*

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} D_N(x) dx = 1 \ ,$$

qualquer que seja $N \in \mathbb{N}$*. Consequentemente, tomando o limite* N *para infinito em (4),*

$$\begin{aligned} \lim_{N\to\infty} I_N &= 1 - \frac{1}{\pi} \lim_{N\to\infty} \int_{-(N+1/2)\pi}^{(N+1/2)\pi} \frac{\sin x}{x} dx \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} \lim_{N\to\infty} \int_{0}^{(N+1/2)\pi} \frac{\sin x}{x} dx \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = 0 \end{aligned}$$

devido a convergência da integral imprópria demonstrada no ítem 2 e o Lema de Riemann-Lebesgue (3), concluindo

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \ .$$