Quarta Lista de Exercícios de Física Matemática I

(Núcleo de Dirichlet e Integral da Função Seno Cardinal)

IFUSP - 6 Abril 2015

Exercício 1 1. *Considere a seqüência numérica* a_n, $n = 0, 1, \ldots$, *dada por*

$$a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx \ .$$

Mostre que a seqüência tem sinal alternado: $a_{2k} > 0$ *e* $a_{2k+1} < 0$, $k = 0, 1, \ldots$, *e* $|a_n|$ *decresce e tende a* 0 *quando* $n \to \infty$. *Para isso, use*

$$\frac{1}{(n+1)\pi} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n\pi} \ , \qquad x \in [n\pi, (n+1)\pi]$$

e obtenha uma quota inferior e superior para a_n *quando* n *é par e ímpar. Note que* $\sin x > 0$ (< 0) *em* $(n\pi, (n+1)\pi)$ *se* n *é par (ímpar).*

2. *Use as quotas inferiores e superiores para mostrar que a integral*

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{N \to \infty} \int_0^N \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N-1} a_n$$

converge.

3. *Seja* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função* π*–periódica satisfazendo*

$$f(x) = \frac{x - \sin x}{x \sin x} \ , \qquad \text{se} \qquad x \in [-\pi/2, \pi/2] \setminus \{0\}$$

e $f(0) = 0$. *Mostre que* f *é uma função contínua em* $-\pi/2 < x < \pi/2$ *com descontinuidade em* $\pm\pi/2$. *Como* f *é integrável e absolutamente integrável, pelo Lema de Riemann–Lebesgue (pág. 56 do texto "Análise de Fourier e EDPs" de Djairo G. de Figueiredo)*

$$\lim_{N \to \infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) \ \sin(2N+1)x \ dx = 0 \qquad (1)$$

4. *Mostre que a integral acima pode ser escrita como*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x) \ \sin(2N+1)x \ dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} D_N(x) \ dx - \frac{1}{\pi} \int_{-(N+1/2)\pi}^{(N+1/2)\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

onde

$$D_N(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin(2N+1)x}{\sin x}$$

é o núcleo de Dirichlet.

5. *Conclua, das propriedades de* $D_N(x)$, *Lema de Riemann–Lebesgue (1) e ítens 2 e 4,*

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \ .$$