Quinta Lista de Exercícios de Física Matemática I – Soluções

(Equações a derivadas parciais não-homogêneas e séries de Fourier)

IFUSP - 3 Maio 2015

Exercício 1 *Considere o problema de valores inicial e de fronteira (PVIF)*

$$\frac{1}{\kappa}\,u_t - u_{xx} = C, \tag{1}$$

em $R = \{(t,x) : t > 0\,,\ 0 < x < \pi\}$, $C > 0$, *com*

$$u(t,0) = u(t,\pi) = 0\ , \qquad t > 0 \tag{2}$$

e

$$u(0,x) = x\,(\pi - x)\ , \qquad 0 \le x \le \pi\ . \tag{3}$$

Pelo método da variação dos parâmetros, a solução o PVIF tem a forma

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\sin nx\ . \tag{4}$$

Observe que u *dado por (4) com* $c_n(t) = b_n \exp\left(-n^2\kappa t\right)$ *é solução do PVIF (1), (2) e (3) para* $C = 0$ *se*

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,(\pi - x)\sin nx\ dx\ , \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

for o n*–ésimo coeficientes de Fourier da função* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π*–periódica, ímpar tal que* $f(x) = x\,(\pi - x)$ *para* $x \in [0,\pi]$. *A função* f *é contínua e sua derivada* f' *é quadrado integrável de forma que sua série de Fourier* $Sf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ *converge uniformemente para* f.

Substituindo (4) em (1), obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\kappa}\dot{c}_n(t) - n^2 c_n(t)\right)\sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin nx \tag{6}$$

onde os g_n*'s são os coeficientes de Fourier da função* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π*–periódica, ímpar tal que* $f(x) = C$ *para* $x \in (0,\pi)$:

$$\begin{aligned} g_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} C\sin nx\ dx \\ &= \frac{2C}{\pi n}\,(1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 4C/(\pi n) & se \ \ n \text{ é ímpar} \\ 0 & se \ \ n \text{ é par} \end{cases} \end{aligned}$$

Como $\{\sin nx\ ,\ n \in \mathbb{N}\}$ *é um conjunto de funções L.I., a igualdade (6) se dá termo-a-termo*

$$\frac{1}{\kappa}\dot{c}_n(t) - n^2 c_n(t) = g_n$$

cuja solução é (por verificação ou integração da equação)

$$\begin{aligned} c_n(t) &= c_n(0)e^{-n^2\kappa t} + \kappa \int_0^t e^{-n^2\kappa(t-s)} g_n \, ds \\ &= b_n e^{-n^2\kappa t} + \frac{g_n}{n^2}\left(1 - e^{-n^2\kappa t}\right) \, . \end{aligned}$$

Para escrever a solução do PVIF (1), (2) e (3), resta ainda calcular os coeficientes b_n's dados por (5):

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{-2}{\pi n}\left(x(\pi - x)\cos nx|_0^\pi - \int_0^\pi (\pi - 2x)\cos nx \, dx \right) \\ &= \frac{2}{\pi n}\int_0^\pi (\pi - 2x)\cos nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi n^2}\left((\pi - 2x)\sin nx|_0^\pi + 2\int_0^\pi \sin nx \, dx \right) \\ &= \frac{4}{\pi n^2}\int_0^\pi \sin nx \, dx \\ &= \frac{4}{\pi n^3}(1 - \cos n\pi) = \begin{cases} 8/(\pi n^3) & \textit{se} \quad n \textit{ é ímpar} \\ 0 & \textit{se} \quad n \textit{ é par} \end{cases} \end{aligned}$$

A solução do PVIF é, portanto,

$$u(t,x) = \frac{8}{\pi}\sum_{\substack{n=1 \\ \text{ímpares}}}^{\infty} \frac{1}{n^3}\left(e^{-n^2\kappa t} + \frac{C}{2}\left(1 - e^{-n^2\kappa t}\right)\right)\sin nx \, . \tag{7}$$

Devido as descontinuidades da função $g(x)$ nas extremidades $x = 0$ e $x = \pi$, a convergência da série de Fourier para a segunda derivada com respeito à x não é uniforme e, consequentemente, a troca de ordem das derivadas com o somatório não é garantida, impedindo de se concluir que a série (7) é de fato uma solução do PVIF no sentido estrito. Lembre que a garantia de que as derivadas de u podem ser obtidas derivando termo-a-termo a série requer convergência uniforme, que não temos quando derivamos duas vezes com respeito a x, termo-a-termo, a parte da solução $(4C/\pi)\sum_{n\geq 1}(1/n^3)\sin nx$.

Exercício 2 *Considere o seguinte PVIF*

$$u_t - u_{xx} + hu = 0 \, , \qquad h > 0 \, , \tag{8}$$

em $R = \{t > 0 \, , \, 0 < x < \pi\}$, com

$$u(t,0) = 0 \qquad \text{e} \qquad u(t,\pi) = 1 \, , \qquad t > 0 \tag{9}$$

e condição inicial

$$u(0,x) = 0 \, , \qquad 0 \leq x < \pi \tag{10}$$

O primeiro passo para resolução do PVFI é transformá-lo em outro PVIF com a condição de contorno homogênea. Escrevemos

$$u(t,x) = v(x) + w(t,x) \tag{11}$$

onde $v(x)$ é a solução independente do tempo das equações (8) e (9):

$$\begin{aligned} -v'' + hv &= 0\,, \qquad 0 < x < \pi \\ v(0) &= 0 \\ v(\pi) &= 1 \end{aligned} \tag{12}$$

cuja solução, impondo as condições de fronteira à solução geral,

$$\begin{aligned} v(x) &= A\cosh\sqrt{h}x + B\sinh\sqrt{h}x \\ v(0) &= A = 0 \\ v(\pi) &= B\sinh\sqrt{h}\pi = 1 \end{aligned}$$

é

$$v(x) = \frac{\sinh\sqrt{h}x}{\sinh\sqrt{h}\pi}\ . \tag{13}$$

Substituindo (11), (12) e (13) em (8), (9) e (10), resulta da linearidade das equações o seguinte PVIF para w

$$w_t - w_{xx} + hw = 0\,, \tag{14}$$

em $R = \{t > 0\,,\, 0 < x < \pi\}$, com

$$w(t,0) = w(t,\pi) = 0\,, \qquad t > 0 \tag{15}$$

e condição inicial

$$w(0,x) = -\frac{\sinh\sqrt{h}x}{\sinh\sqrt{h}\pi}\,, \qquad 0 \le x < \pi\ . \tag{16}$$

Note para equação (14)

$$u_t - u_{xx} + hu = -v'' + hv + w_t - w_{xx} + hw = w_t - w_{xx} + hw = 0$$

e as demais equações seguem analogamente.

O PVIF (14), (15) e (16) pode ser resolvido pelo método de Fourier. Substituindo

$$w(t,x) = T(t)X(x)$$

em (14) e (15), resulta em um par de equações ordinárias

$$\begin{aligned} T' + (\lambda^2 + h)\kappa T &= 0 \\ X'' + \lambda^2 X &= 0\,, \qquad X(0) = X(\pi) = 0\ . \end{aligned}$$

A segunda equação e condição de fronteira é um problema de autovalores, já resolvido anteriormente:

$$\begin{aligned} \lambda_n &= n \\ X_n(x) &= \sin nx \ , \qquad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

são os autovalores e auto–funções correspondentes. A primeira equação tem solução $T(t)$ *proporcional a* $\exp\left(-(\lambda^2+h)t\right)$*. Portanto, a solução do PVIF para* w *é uma combinação linear*

$$w(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-(n^2+h)t} \sin nx \tag{17}$$

onde os b_n *são os coeficientes de Fourier da função* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*,* 2π*–periódica ímpar tal que* $f(x) = -\sinh\sqrt{h}x / \sinh\sqrt{h}\pi$*,*

$$b_n = \frac{-2}{\pi \sinh\sqrt{h}\pi} \int_0^{\pi} \sinh\sqrt{h}x \ \sin nx \ dx \ .$$

Pela fórmula de Euler, escrevemos o integrando como

$$\sinh\sqrt{h}x \ \sin nx = \frac{1}{2i}\left(-\cos\left(n+i\sqrt{h}\right)x + \cos\left(n-i\sqrt{h}\right)x\right) \ ,$$

cuja integral resulta

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{i\pi\sinh\sqrt{h}\pi}\int_0^{\pi}\left(\cos\left(n+i\sqrt{h}\right)x - \cos\left(n-i\sqrt{h}\right)x\right)dx \\ &= \frac{1}{i\pi\sinh\sqrt{h}\pi}\left(\frac{1}{n+i\sqrt{h}}\sin\left(n+i\sqrt{h}\right)\pi - \frac{1}{n-i\sqrt{h}}\sin\left(n-i\sqrt{h}\right)\pi\right) \\ &= \frac{1}{i\pi\sinh\sqrt{h}\pi}\left(\frac{1}{n+i\sqrt{h}} + \frac{1}{n-i\sqrt{h}}\right) i\sinh\sqrt{h}\pi\cos n\pi \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{n}{n^2+h}\cos n\pi \end{aligned} \tag{18}$$

onde usamos, na terceira linha, $\sin n\pi = 0$ *e* $\sin i\sqrt{h}\pi = i\sinh\sqrt{h}\pi$*. Substituindo (13), (17) e (18) em (11), concluímos*

$$u(t,x) = \frac{\sinh\sqrt{h}x}{\sinh\sqrt{h}\pi} + \frac{2}{\pi}e^{-ht}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+h}e^{-n^2t}\sin nx \ .$$