

Quinta Lista de Exercícios de Física Matemática I

(Equações a Derivadas Parciais, Não-Homogêneas e Séries de Fourier)

IFUSP - 17 Abril 2015

Exercício 1 Uma fonte externa fornece calor a uma taxa constante uniformemente ao longo de uma barra condutora de extensão π , cuja temperatura inicial é $f(x)$ e em cujas faces: $x = 0$ e $x = \pi$, a temperatura é mantida igual a zero. Nestas condições, o problema de valores inicial e de fronteira (PVI) fica

$$\frac{1}{\kappa} u_t - u_{xx} = C,$$

em $R = \{(t, x) : t > 0, 0 < x < \pi\}$, onde C é uma constante positiva, com

$$u(t, x) = u(t, 0) = 0, \quad t > 0$$

e $u(0, x) = f(x)$ para $0 \leq x \leq \pi$. Resolva o PVI para

$$f(x) = x(\pi - x).$$

Exercício 2 Mostre que a solução do seguinte PVI

$$u_t - u_{xx} + hu = 0, \quad h > 0,$$

em $R = \{t > 0, 0 < x < \pi\}$, com

$$u(t, 0) = 0 \quad \text{e} \quad u(t, \pi) = 1, \quad t > 0$$

e condição inicial

$$u(0, x) = 0, \quad 0 \leq x < \pi$$

é dada por

$$u(t, x) = \frac{\sinh \sqrt{h} x}{\sinh \sqrt{h} \pi} + \frac{2}{\pi} e^{-ht} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + h} e^{-n^2 t} \sin nx.$$