Sexta Lista de Exercícios de Física Matemática I – Soluções

(Equações a Derivadas Parciais, Séries de Fourier e Equação da Energia)

IFUSP - 25 Maio 2015

Exercício 1 (Corda percutida por martelo plano) *Considere o seguinte PVIF:*

$$\frac{1}{v^2} u_{tt} - u_{xx} = 0 \,, \tag{1}$$

em $R = \{t > 0 \,, 0 < x < L\}$, com condição de fronteira

$$u(t,0) = u(t,L) = 0 \,, \tag{2}$$

para $t > 0$, e iniciais

$$u(0,x) = f(x) \equiv 0 \qquad \text{e} \qquad u_t(0,x) = g(x) = \begin{cases} c & \text{se} \quad |x-a| \le \delta \\ 0 & \text{se} \quad |x-a| > \delta \end{cases} \,, \tag{3}$$

para $0 \le x \le L$, onde $\delta \le a \le L - \delta$. Pelo método de Fourier (separação de variáveis), a solução do PVIF dado pelas equações (1), (2) e (3), tem a forma

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin \frac{n\pi}{L} x \tag{4}$$

com

$$c_n(t) = b_n \cos \frac{n\pi v}{L} t + d_n \sin \frac{n\pi v}{L} t \tag{5}$$

onde

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \; dx = 0 \;, \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \frac{n\pi v}{L} d_n &= \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi}{L} x \; dx \\ &= \frac{2c}{L} \int_{a-\delta}^{a+\delta} \sin \frac{n\pi}{L} x \; dx \;, \qquad n = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{7}$$

são, respectivamente, os coeficientes de Fourier das funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $2\pi-$periódicas, ímpares e tais que $f(x)$ e $g(x)$ em $[0, \pi]$ dadas por (3). Integrando (7), temos

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{2c}{n\pi v} \frac{L}{n\pi} \Big(\cos \frac{n\pi}{L} (a - \delta) - \cos \frac{n\pi}{L} (a + \delta) \Big) \\ &= \frac{4cL}{n^2 \pi^2 v} \sin \frac{n\pi}{L} a \;\, \sin \frac{n\pi}{L} \delta \end{aligned}$$

de onde se conclui, juntamente com (4), (5) e (6),

$$u(t,x) = \frac{4cL}{\pi^2 v} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi a}{L} \; \sin \frac{n\pi\delta}{L} \; \sin \frac{n\pi x}{L} \; \sin \frac{n\pi v t}{L} \,.$$

Observe que a função g não é contínua e sua série de Fourier $Sg(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n\pi v/L)\, d_n \sin nx$ não converge uniformemente para g em $[0,\pi]$. No entanto, a série de $u(t,x)$ converge uniformemente em $\bar{R}$ para uma função contínua que, por sua vez, é solução do PVIF no sentido generalizado uma vez que uma solução de (1), (2) e (3) no sentido estrito requer, além disso (veja Teorema 5.1, pág. 137 do livro texto de Djairo G. de Figueiredo), g' contínua em $[0,\pi]$ e g'' seccionalmente contínua.

A solução obtida é simétrica com respeito a troca de papel de a com δ porém, esta troca deve respeitar simultaneamente as condições $\delta \le a \le L-\delta$ e $a \le \delta \le L-a$, caso contrário os limites de integração da integral (7) para os coefficientes d_n's correspondentes seriam diferentes, resultando duas séries distintas para $u(t,x)$. Respeitando estas condições teríamos $a = \delta \le L/2$ e trocar a por δ não muda a função.

Exercício 2 *Para obter a equação da energia do PVIF:*

$$\frac{1}{v^2}\, u_{tt} - u_{xx} = 0 \ , \tag{8}$$

em $R = \{(t,x) : t > 0\, ,\, 0 < x < L\}$, sujeita às condições de fronteira

$$u_x(t,0) - \alpha\, u(t,0) = u_x(t,L) + \beta\, u(t,L) = 0\, , \qquad t > 0 \tag{9}$$

e iniciais

$$u(0,x) = f(x) \qquad \text{e} \qquad u_t(0,x) = g(x)\, , \qquad 0 \le x \le L \tag{10}$$

com α, $\beta \ge 0$, procedemos da seguinte maneira.

Recordando que $v^2 = \tau/\rho$, onde ρ e τ, a densidade (linear) e a tensão da corda em repouso, se mantém constante durante o movimento, vamos assumir que u é uma solução no sentido estrito do PVIF. Sendo u da classe C^1 em $\bar{R}$ e da classe C^2 em R, satisfazendo o PVIF, a equação (8) multiplicada por τu_t pode ser escrita como

$$\begin{aligned} 0 &= \rho u_{tt} u_t - \tau u_{xx} u_t \\ &= \rho u_{tt} u_t + \tau u_{xt} u_x - \tau \left(u_{xt} u_x + u_{xx} u_t\right) \\ &= \frac{\rho}{2}\left(u_t^2\right)_t + \frac{\tau}{2}\left(u_x^2\right)_t - \tau\left(u_x u_{tx} + u_{xx} u_t\right) \\ &= \frac{\rho}{2}\left(u_t^2\right)_t + \frac{\tau}{2}\left(u_x^2\right)_t - \tau\left(u_x u_t\right)_x \end{aligned}$$

a qual, ao integrar em $[0,L]$, resulta

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^L \left(\rho u_{tt} u_t - \tau u_{xx} u_t\right) dx \\ &= \int_0^L \left(\frac{\rho}{2}\left(u_t^2\right)_t + \frac{\tau}{2}\left(u_x^2\right)_t - \tau\left(u_x u_t\right)_x\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^L \left(\rho u_t^2 + \tau u_x^2\right)_t dx - \tau\, u_x u_t\big|_0^L \end{aligned} \tag{11}$$

bastando para isso aplicar o teorema fundamental do cálculo no último termo. Sendo o integrando da expressão acima uma função contínua em R e integrável em $[0, L]$, a derivada com respeito a t pode ser tomada fora da integral. Usando (9), o termo de fronteira pode ser escrito como

$$
\begin{aligned}
-\tau\, u_x u_t\big|_0^L &= \tau\left(u_x(t,0)u_t(t,0) - u_x(t,L)u_t(t,L)\right) \\
&= \tau\left(\alpha u(t,0)u_t(t,0) + \beta u(t,L)u_t(t,L)\right) \\
&= \frac{\tau}{2}\left(\alpha u(t,0)^2 + \beta u(t,L)^2\right)_t \ . \qquad (12)
\end{aligned}
$$

As equações (11) e (12) juntas resultam em

$$\frac{d\tilde{E}}{dt}(t) = 0$$

onde

$$\tilde{E}(t) = E(t) + \frac{\tau}{2}\left(\alpha\ u(t,0)^2 + \beta\ u(t,L)^2\right) \ . \qquad (13)$$

A energia da corda

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L \left(\rho u_t^2 + \tau u_x^2\right) dx \qquad (14)$$

não é uma quantidade conservada pelo movimento devido a condição de fronteira (9). A quantidade $\tilde{E}(t)$, que se conserva pelo movimento, pode ser escrita em termos dos dados iniciais (10) do problema:

$$\tilde{E}(t) = \tilde{E}(0) = \frac{1}{2}\int_0^L \left(\rho g(x)^2 + \tau f'(x)^2\right) dx + \frac{\tau}{2}\left(\alpha f(0)^2 + \beta f(L)^2\right) \ . \qquad (15)$$

Admitindo a existência de uma solução $u(t,x)$ do PVIF no sentido estrito, vamos provar que é única. Supondo que haja duas possíveis soluções do PVIF $u^1(t,x)$ e $u^2(t,x)$, a diferença

$$w(t,x) = u^1(t,x) - u^2(t,x)$$

satisfaz o PVIF (8), (9) com (10) substituído pelo dado inicial trivial:

$$\frac{1}{v^2}\, w_{tt} - w_{xx} = 0 \ ,$$

em $R = \{(t,x) : t > 0\, ,\ 0 < x < L\}$,

$$w_x(t,0) - \alpha\, w(t,0) = w_x(t,L) + \beta\, w(t,L) = 0\, , \qquad t > 0$$

e

$$w(0,x) = 0 \qquad \text{e} \qquad w_t(0,x) = 0\, , \qquad 0 \le x \le L \ .$$

A quantidade $\tilde{E}(t)$ deste problema, devido sua conservação e a (15), satisfaz

$$\tilde{E}(t) = \tilde{E}(0) = 0$$

de onde se conclui, tendo em vista (14) e (13),

$$\frac{1}{2}\int_0^L \left(\rho w_t^2 + \tau w_x^2\right) dx + \frac{\tau}{2}\left(\alpha\ w(t,0)^2 + \beta\ w(t,L)^2\right) = 0$$

e, consequentemente, devido a continuidade do integrando em $\bar{R}$*,*

$$\begin{aligned} w_t(t,x) &= w_x(t,x) = 0 \ , \qquad t > 0 \ , \ 0 \leq x \leq L \\ w(t,0) &= w(t,L) = 0, \qquad t > 0 \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{aligned} w(t,x) &= \text{Const.} \ , \qquad t > 0 \ , \ 0 \leq x \leq L \\ w(t,0) &= w(t,L) = 0, \qquad t > 0 \end{aligned}$$

resultando, devido a continuidade de $w(t,x)$ *em* $\bar{R}$*, a contradição:*

$$w(t,x) = u^1(t,x) - u^2(t,x) = 0 \ , \qquad em \ \ \bar{R}$$

a saber, caso exista, $u(t,x)$ *é a única solução do PVIF definido pelas equações (8), (9) e (10).*