Sexta Lista de Exercícios de Física Matemática I

(Equações a Derivadas Parciais, Séries de Fourier e Equação da Energia)

IFUSP - 4 Maio 2015

Exercício 1 (Corda percutida por martelo plano) *Mostre que a solução do PVIF:*

$$\frac{1}{\nu^2}\,u_{tt} - u_{xx} = 0\,,$$

em $R = \{t > 0\,,\, 0 < x < L\}$, *sujeita às condições de fronteira*

$$u(t,0) = u(t,L) = 0\,,$$

para $t > 0$, *e iniciais*

$$u(0,x) = 0 \qquad \text{e} \qquad u_t(0,x) = \begin{cases} c & \text{para} \quad |x-a| \le \delta \\ 0 & \text{para} \quad |x-a| > \delta \end{cases}\,,$$

para $0 \le x \le L$, *onde* $0 < a < L$, *é dada por*

$$u(t,x) = \frac{4cL}{\pi^2 v}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi a}{L}\,\sin\frac{n\pi\delta}{L}\,\sin\frac{n\pi x}{L}\,\sin\frac{n\pi v t}{L}\,.$$

Observe que a solução é simétrica com respeito a troca de papel de a *com* δ. *Verifique se a condição inicial satisfaz esta propriedade e comente.*

Exercício 2 *Obtenha a equação da energia para o PVIF:*

$$\frac{1}{\nu^2}\,u_{tt} - u_{xx} = 0\ ,$$

em $R = \{(t,x) : t > 0\,,\, 0 < x < L\}$, *sujeita às condições de fronteira*

$$u_x(t,0) - \alpha\,u(t,0) = u_x(t,L) + \beta\,u(t,L) = 0\,, \qquad t > 0$$

e iniciais

$$u(0,x) = f(x) \qquad \text{e} \qquad u_t(0,x) = g(x)\,, \qquad 0 \le x \le L$$

com α *e* β *constantes positivas. Demonstre a seguir que a solução deste problema, admitindo sua existência, é única.*

Indicação: Encontre uma função $\tilde{E}(t) = E(t) + \alpha^2 u(t,0)^2/2 + \beta^2 u(0,L)^2/2$, onde $E(t)$ é a função energia, que se conserva no tempo e utilize a conservação de $\tilde{E}(t)$ para demonstrar a unicidade do PVIF.