Sétima Lista de Exercícios de Física Matemática I – Soluções

(Fórmula de D'Alembert e Oscilações Forçadas)

IFUSP - 16 de Junho 2015

Exercício 1 (Corda semi-infinita) *Considere o seguinte PVIF:*

$$\frac{1}{v^2}\,u_{tt} - u_{xx} = 0\,, \tag{1}$$

em $R = \{t > 0\,,\, x > 0\}$*, sujeita à condição de fronteira*

$$u(t,0) = e^{-t}\,, \qquad t > 0, \tag{2}$$

e iniciais

$$u(0,x) = e^{-x} \qquad \text{e} \qquad u_t(0,x) = \cos x\ , \qquad x \geq 0. \tag{3}$$

Dividimos o problema em duas partes: ***(I)*** *Para* $(t,x) \in R$ *tal que* $x - vt \geq 0$*, pela fórmula de D'Alembert,*

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(f(x+vt) + f(x-vt)\right) + \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} g(y)\ dy$$

com $f(x) = e^{-x}$ *e* $g(x) = \cos x$*, resulta*

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \frac{1}{2}\left(e^{-(x+vt)} + e^{-(x-vt)}\right) + \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} \cos y\ dy \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{-(x+vt)} + e^{-(x-vt)}\right) + \frac{1}{2v}\left(\sin(x+vt) - \sin(x-vt)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{-(x+vt)} + e^{-(x-vt)}\right) + \frac{1}{v}\sin vt \cos x\ . \end{aligned}$$

Note que, devido a causalidade, o intervalo de dependência $[x - vt, x + vt]$ *do ponto* (t,x) *está contido no semi–eixo* $[0,\infty)$ *sobre o qual a corda se extende quando em repouso. A solução* $u(t,x)$ *para os pontos* (t,x) *tais que* $x - vt \geq 0$ *não difere da solução do PVI de uma corda infinita.*

(II) *Para* $(t,x) \in R$ *tal que* $x - vt \leq 0$*, devemos retornar à solução geral da equação (1):*

$$u(t,x) = F(x+vt) + G(x-vt) \tag{4}$$

onde, devido as condições iniciais (3),

$$\begin{aligned} F(x) + G(x) &= e^{-x}\ , \\ v\left(F'(x) - G'(x)\right) &= \cos x\ , \qquad x \geq 0 \end{aligned}$$

resulta em

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2v}\sin x + K \qquad (5) \\ G(x) &= \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2v}\sin x + K, \qquad x \geq 0 \end{aligned}$$

com K uma constante de integração arbitrária.

Resta ainda determinar a função $G(x)$ para $x < 0$. Usamos, para isso, a condição de fronteira (2):

$$F(vt) + G(-vt) = e^{-t}, \qquad t \geq 0$$

que, devido a (5), pode ser escrita como

$$\begin{aligned} G(-y) &= e^{-y/v} - F(y) \\ &= e^{-y/v} - \frac{1}{2}e^{-y} - \frac{1}{2v}\sin y - K \ , \qquad y \geq 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Substituindo (5) e (6) em (4), obtemos

$$\begin{aligned} u(t,x) &= F(x+vt) + G(-(vt-x)) \\ &= e^{-(t-x/v)} + \frac{1}{2}\left(e^{-(x+vt)} - e^{-(vt-x)}\right) + \frac{1}{2v}\left(\sin(x+vt) - \sin(vt-x)\right) \\ &= e^{-(t-x/v)} + \frac{1}{2}\left(e^{-(x+vt)} - e^{-(vt-x)}\right) + \frac{1}{v}\cos vt \ \sin x \ . \end{aligned}$$

Exercício 2 (Oscilações forçadas) *Considere o problema:*

$$\frac{1}{v^2}\, u_{tt} - u_{xx} = A\cos 2\pi\omega t\,, \tag{7}$$

em $R = \{t > 0\,,\, 0 < x < L\}$, sujeita à condição de fronteira

$$u(t,0) = u(t,L) = 0 \ , \qquad t > 0 \tag{8}$$

onde A, v e ω são reais positivos.

Vamos mostrar que, exceto para certos valores especiais $\{\omega_n\}$ de ω, o problema acima tem solução da forma $p(x)\cos 2\pi\omega t$. Substituindo a forma da solução em (7), temos

$$-p'' - \frac{4\pi^2}{v^2}\omega^2 p = A \ , \qquad 0 < x < L \tag{9}$$

Devido a condição de fronteira (8), procuramos uma solução de (9) na forma de uma série de Fourier em senos:

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi}{L}x \tag{10}$$

Para isso, representamos o termo não–homogêneo de (9) em uma série de Fourier em senos (de mesmo período $2L$):

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \sin\frac{n\pi}{L}x, \qquad 0 < x < L \tag{11}$$

onde

$$\begin{aligned} h_n &= \frac{2A}{L}\int_0^L \sin\frac{n\pi}{L}x \ dx \\ &= \frac{2A}{n\pi}\left(1 - \cos n\pi\right) \ . \end{aligned}$$

Substituindo (10) e (11) em (9), usando a independência linear das funções $\left\{\sin\frac{n\pi}{L}x\ ,n\in\mathbb{N}\right\}$, *obtemos*

$$\frac{4\pi^2}{v^2}\left(\omega_n^2-\omega^2\right)c_n=h_n$$

de onde se conclui: se

$$\omega\neq\omega_n:=\frac{nv}{2L}$$

para todo $n\in\mathbb{N}$, *então existe uma solução* $p(x)$ *de (9) da forma (10) com*

$$\begin{aligned}c_n &= \frac{v^2}{4\pi^2}\frac{h_n}{\omega_n^2-\omega^2}\\ &= \frac{Av^2}{2n\pi^3}\frac{1-\cos n\pi}{\omega_n^2-\omega^2}\end{aligned}$$

Determinamos agora a solução $u(t,x)$ *do problema (7) e (8) tal que satisfaz*

$$u(0,x)=0 \qquad \text{e} \qquad u_t(0,x)=0\ , \qquad 0\leq x\leq L\ . \tag{12}$$

A solução geral do problema (7) e (8) é

$$\begin{aligned}u(t,x) &= u_{\text{hom}}(t,x)+p(x)\cos 2\pi\omega t\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\sin 2\pi\omega_n t+d_n\cos 2\pi\omega_n t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\cos 2\pi\omega t\sin\frac{n\pi}{L}x\end{aligned}$$

com b_n *e* d_n *a serem determinados pelas equações*

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left(d_n+c_n\right)\sin\frac{n\pi}{L}x &= 0\\ 2\pi\omega_n\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{L}x &= 0\ .\end{aligned}$$

Pela independência linear das funções $\sin\frac{n\pi}{L}x$, *obtemos*

$$\begin{aligned}b_n &= 0\\ d_n &= -c_n\ , \qquad \forall\ n\in\mathbb{N}\ .\end{aligned}$$

A solução do problema PVIF, (7) e (8) e (12) é, portanto,

$$u(t,x)=\frac{Av^2}{2\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi}{n}\frac{\cos 2\pi\omega t-\cos 2\pi\omega_n t}{\omega_n^2-\omega^2}\sin\frac{n\pi}{L}x$$

Quando $\omega=\omega_n$ *para algum* n, *aplicamos L'Hopital à solução* $u(t,x)$ *com* $\omega\neq\omega_n$, *no limite* $\omega\to\omega_n$. *Suponha* $\omega=\omega_{n_0}$ *para algum* $n_0\in\mathbb{N}$. *Então*

$$\begin{aligned}\lim_{\omega\to\omega_n}\frac{\cos 2\pi\omega t-\cos 2\pi\omega_{n_0}t}{\omega_{n_0}^2-\omega^2} &= \lim_{\omega\to\omega_{n_0}}\frac{\left(\cos 2\pi\omega t-\cos 2\pi\omega_{n_0}t\right)'}{\left(\omega_{n_0}^2-\omega^2\right)'}\\ &= \lim_{\omega\to\omega_{n_0}}\frac{\pi t\sin 2\pi\omega t}{\omega}\ ,\end{aligned}$$

onde $'$ denota a derivada com respeito a ω,

$$u(t,x) = \frac{Av^2}{2\pi^3} \sum_{n\geq 1, n\neq n_0} \frac{1-\cos n\pi}{n} \frac{\cos 2\pi\omega t - \cos 2\pi\omega_n t}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin \frac{n\pi}{L} x + \frac{Av^2}{2\pi^2} \frac{1-\cos n_0\pi}{n_0} \frac{t \sin 2\pi\omega_{n_0} t}{\omega_{n_0}} \sin \frac{n_0\pi}{L} x$$

e o modo de vibração correspondente à frequência $\omega_0 = \dfrac{n_0 v}{2L}$ é amplificado por t, devido a ressonância. Note que $1-\cos n_0\pi$ se anula quando n_0 é par e somente os modos ímpares podem ser ressonantes.