Oitava Lista de Exercícios de Física Matemática I – Soluções

(Transformada de Foreiro, Convolução e Identidade de Parseval)

IFUSP - 24 de Junho 2015

Exercício 1 *Calcularemos a transformada de Fourier*

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ e^{-i\xi x}\ dx$$

das seguintes funções:

1. *Se* $f(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$, *então*

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|-i\xi x}\ dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{\infty} e^{-(a-i\xi)x}\ dx + \int_0^{\infty} e^{-(a-i\xi)x}\ dx \right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a+i\xi} + \frac{1}{a-i\xi} \right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\xi^2 + a^2}
\end{aligned}$$

2. *Se* $f(x) = e^{-ax}$ *para* $x > 0$ *e* $f(x) = 0$ *para* $x \leq 0$, *com* $a > 0$, *então*

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ax-i\xi x}\ dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a+i\xi}
\end{aligned}$$

3. *Se* $f(x) = e^{-a|x|} \sin cx$, $a > 0$ *e* $c \in \mathbb{R}$, *escrevemos*

$$f(x) = e^{-a|x|}\, \frac{e^{icx} - e^{-icx}}{2i}\ .$$

   Fazendo uso das propriedades

$$\begin{aligned}
\widehat{af_1 + bf_2}(\xi) &= a\hat{f}_1(\xi) + b\hat{f}_2(\xi) \\
\widehat{fe^{\pm icx}}(\xi) &= \hat{f}(\xi \mp c)
\end{aligned}$$

juntamente com a transformadas de Fourier do ítem 1., temos

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{2i}\left(\widehat{e^{-a|x|+icx}}(\xi) - \widehat{e^{-a|x|-icx}}(\xi)\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\widehat{e^{-a|x|}}(\xi - c) - \widehat{e^{-a|x|}}(\xi - c)\right) \\
&= \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{a}{(\xi-c)^2+a^2} - \frac{a}{(\xi+c)^2+a^2}\right) \\
&= -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2ac\xi}{(\xi^2+a^2+c^2-2c\xi)(\xi^2+a^2+c^2+2c\xi)}
\end{aligned}$$

4. *Se $f(x) = \cos kx$ para $|x| \leq N\pi/k$ e $f(x) = 0$ para $|x| > N\pi/k$, onde N e k são inteiros positivos, então*

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\left(\int_{-N\pi/k}^{N\pi/k} e^{-i(\xi-k)x}dx + \int_{-N\pi/k}^{N\pi/k} e^{-i(\xi+k)x}dx\right) \\
&= \frac{i}{2\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\xi-k}\left(e^{-i(\xi-k)N\pi/k} - e^{i(\xi-k)N\pi/k}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\xi+k}\left(e^{-i(\xi+k)N\pi/k} - e^{i(\xi+k)N\pi/k}\right)\right) \\
&= \frac{i(-1)^N}{\sqrt{2\pi}}\frac{\xi}{\xi^2-k^2}\left(e^{-i\xi N\pi/k} - e^{i\xi N\pi/k}\right) \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}}(-1)^N\frac{\xi}{\xi^2-k^2}\sin\frac{N\pi}{k}\xi
\end{aligned}$$

onde na terceira igualdade fizemos uso de

$$e^{\pm iN\pi} = (-1)^N \quad .$$

Observe que em todos os ítens acima $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função integrável e integrável em valor absoluto, no sentido de uma integral de Riemann imprópria: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\ dx = \lim_{N,M\to\infty}\int_{-M}^{N} |f(x)|\ dx < \infty$*, estando desta forma definida sua transformada de Fourier $\hat{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$. Sendo f uma função real sua transformada de Fourier $\hat{f}$ é real se f for par e imaginária se f for ímpar. Observe também que $\hat{f}(\xi)$ tem a mesma paridade de $f(x)$.*

Exercício 2 *Para encontrar uma função $f(x)$ cuja transformada de Fourier é*

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\sin b\xi}{\xi}e^{-a\xi^2} := \hat{\chi}(\xi)\hat{\phi}(\xi) \ , \qquad a > 0 \ , \ b \in \mathbb{R} \tag{1}$$

faremos uso dos teoremas da convolução e da inversa (veja Teoremas 6.3' e 6.1 do livro texto "Análise de Fourier e equações diferenciais parciais", Djairo G. de Figueiredo):

$$f = \left(\hat{f}\right)^\vee = \left(\hat{\chi}\hat{\phi}\right)^\vee = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\chi * \phi \ . \tag{2}$$

Se $\chi(x) = \chi_b(x) = \sqrt{\pi/2}$ *para* $|x| \le b$ *e* $\chi(x) = 0$ *para* $|x| > b$, *então*

$$\begin{aligned}
\hat{\chi}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x)\ e^{-i\xi x}\ dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{-b}^{b} e^{-i\xi x}\ dx \\
&= \frac{1}{\xi} \frac{e^{-i\xi b} - e^{-i\xi b}}{-2i} \\
&= \frac{\sin b\xi}{\xi}
\end{aligned}$$

coincide com a definição da função $\hat{\chi}$ *em (1). Note que* χ *é integrável e absolutamente integrável.*

Se $\phi(x) = e^{-x^2/(4a)}/\sqrt{2a}$, *então* $\phi \in \mathcal{S}$ *e*

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\ e^{-i\xi x}\ dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/(4a)}\ e^{-i\xi x}\ dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\sqrt{4a}\xi y\right) e^{-y^2}\ dy \equiv \psi\left(\sqrt{4a}\xi\right) \qquad (3)
\end{aligned}$$

onde $\psi = \psi(t)$ *satisfaz a equação*

$$\psi' + \frac{t}{2}\psi = 0$$

com $\psi(0) = 1$, *cuja solução* $\psi(t) = \exp\left(-t^2/4\right)$ *resulta*

$$\hat{\phi}(\xi) = \psi\left(\sqrt{4a}\xi\right) = e^{-a\xi^2} \qquad (4)$$

coincidindo com a definição de $\hat{\phi}$ *em (1).*

Substituindo χ *e* ϕ *no lado direito de (1), concluimos*

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x-y)\phi(y)dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x-y)\ e^{-y^2/(4a)}dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x-y)\ e^{-y^2/(4a)}dy
\end{aligned}$$

e, usando

$$|x-y| \le b \Leftrightarrow -b \le y - x \le b \Leftrightarrow x - b \le y \le x + b\ ,$$

continuamos

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\sqrt{8a}} \int_{x-b}^{x+b} e^{-y^2/(4a)} dy \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{(x-b)/\sqrt{4a}}^{(x+b)/\sqrt{4a}} e^{-s^2} ds \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_{0}^{(x+b)/\sqrt{4a}} e^{-s^2} ds - \int_{0}^{(x-b)/\sqrt{4a}} e^{-s^2} ds \right) \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{8}} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{x+b}{\sqrt{4a}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-b}{\sqrt{4a}}\right) \right)
\end{aligned}
$$

onde $\operatorname{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-s^2} ds$ *é a função erro.*

Verifiquemos o teorema de Plancherel–Parseval: $\|f\|^2 = \left\|\hat{f}\right\|^2$ *para a função Gaussiana:*

$$
f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \, e^{-x^2/(2a)}
$$

cuja transformada de Fourier é, por (3) e (4) com a substituído por $a/2$,

$$
\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-a\xi^2/2} \ .
$$

Por um lado, temos

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(x)^2 dx &= \frac{1}{2\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/a} \ dx \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \ dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \ .
\end{aligned}
$$

Por outro lado, temos

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)^2 d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\xi^2} \ d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \ dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}}
\end{aligned}
$$

concluindo a igualdade.