Nona Lista de Exercícios de Física Matemática I – Soluções

(Transformada de Fourier, Convolução e Inversa: Aplicações em EDP)

IFUSP - 24 de Junho 2015

Exercício 1 *Considere o problema de valor inicial (PVI) de uma corda elástica infinita:*

$$\frac{1}{v^2}u_{tt} - u_{xx} = 0 \ , \qquad t > 0 \ , \ x \in \mathbb{R}$$

com

$$u(0,x) = f(x) \qquad e \qquad u_t(0,x) = g(x) \ , \qquad x \in \mathbb{R}$$

cuja solução, dada pela fórmula de D' Alembert

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(f(x+vt) + f(x-vt)\right) + \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} g(y)dy \ , \tag{1}$$

desejamos obtê-la por transformada de Fourier.

Denotando por $\hat{u} = \hat{u}(t,\xi)$ a transformada de Fourier (com respeito a variável x) da solução do PVI:

$$\hat{u}(t,\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u(t,x)\ e^{-i\xi x}\ dx$$

e usando as propriedades de linearidade da transformada de Fourier e das derivadas com respeito a x

$$\widehat{u_{xx}} = i\xi\widehat{u_x} = -\xi^2\hat{u}$$

e com respeito a t

$$\widehat{u_{tt}} = \hat{u}_{tt}$$

(inversão de ordem das derivadas com a integral de Fourier), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \widehat{\frac{1}{v^2}u_{tt} - u_{xx}} \\ &= \frac{1}{v^2}\widehat{u_{tt}} - \widehat{u_{xx}} \\ &= \frac{1}{v^2}\hat{u}_{tt} + \xi^2\hat{u} \end{aligned} \tag{2}$$

sujeita às condições

$$\begin{aligned} \hat{u}(0,\xi) &= \hat{f}(\xi) \\ \hat{u}_t(0,\xi) &= \hat{g}(\xi) \ . \end{aligned} \tag{3}$$

Estamos assumindo que as integrais de Fourier destas quantidades façam sentido.

A solução de (2)

$$\hat{u}(t,\xi) = A\cos v\xi t + B\sin v\xi t$$

com A e B constantes dependentes da variável ξ, é determinada por (3):

$$\begin{aligned}\hat{u}(0,\xi) &= A = \hat{f}(\xi)\\ \hat{u}_t(0,\xi) &= v\xi B = \hat{g}(\xi)\ ,\end{aligned}$$

resultando

$$\hat{u}(t,\xi) = \hat{f}(\xi)\cos v\xi t + \frac{1}{v}\hat{g}(\xi)\frac{\sin v\xi t}{\xi}\ . \tag{4}$$

Para obter a solução do PVI original, faremos uso dos teoremas da convolução e da inversa (veja Teoremas 6.3' e 6.1 do livro texto "Análise de Fourier e equações diferenciais parciais", Djairo G. de Figueiredo).

Para o primeiro termo do lado direito de (4), temos

$$\begin{aligned}\left(\hat{f}(\xi)\cos v\xi t\right)^\vee &= \frac{1}{2}\left(\hat{f}(\xi)(e^{iv\xi t}+e^{-iv\xi t})\right)^\vee\\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\hat{f}(\xi)e^{ivt\xi}\right)^\vee + \left(\hat{f}(\xi)e^{-ivt\xi}\right)^\vee\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(f(x+vt)+f(x+vt)\right)\end{aligned}$$

por linearidade e propriedade da transformada inversa da modulação $\hat{f}e^{\pm ivt\xi}$ de $\hat{f}$, resultando o primeiro termo da solução de D'Alembert (1).

Para o segundo termo do lado direito de (4), aplicamos a transformada inversa juntamente com o teorema da convolução:

$$(\hat{g}\hat{\chi})^\vee = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}g*\chi\ . \tag{5}$$

Observe que, se $\chi(x) = \chi_{vt}(x) = \sqrt{\pi/2}$ para $|x| \le vt$ e $\chi(x) = 0$ para $|x| > vt$, então

$$\begin{aligned}\hat{\chi}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\chi(x)\ e^{-i\xi x}\ dx\\ &= \frac{1}{2}\int_{-vt}^{vt}e^{-i\xi x}\ dx\\ &= \frac{1}{\xi}\frac{e^{-i\xi vt}-e^{-i\xi vt}}{-2i}\\ &= \frac{\sin v\xi t}{\xi}\end{aligned}$$

coincide com a função $\hat{\chi}$ que multiplica $\hat{g}$ em (4), de onde se conclui

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= (\hat{u}(t,\xi))^{\vee} \\
&= \left(\hat{f}(\xi)\cos v\xi t\right)^{\vee} + \frac{1}{v}\left(\hat{g}(\xi)\frac{\sin v\xi t}{\xi}\right)^{\vee} \\
&= \frac{1}{2}\left(f(x+vt)+f(x+vt)\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}v} g * \chi_{vt} \\
&= \frac{1}{2}\left(f(x+vt)+f(x+vt)\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}v}\int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)\chi_{vt}(y)dy \\
&= \frac{1}{2}\left(f(x+vt)+f(x+vt)\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}v}\int_{-vt}^{vt} g(x-s)ds \\
&= \frac{1}{2}\left(f(x+vt)+f(x+vt)\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}v}\int_{x-vt}^{x+vt} g(y)dy
\end{aligned}
$$

onde na última linha empregamos a mudança de variável: $y = x - s$ e $dy = -ds$, invertendo em seguida os limites de integração, concluindo a demonstração.

Exercício 2 *Considere o problema de valor inicial e de fronteira (PVIF)*

$$\frac{1}{\kappa}u_t - u_{xx} = 0 \, , \qquad t > 0 \, , \; x > 0 \tag{6}$$

$$u(t,0) = A \, , \qquad t > 0 \tag{7}$$

e

$$u(0,x) = f(x) \, , \qquad x \geq 0 \, , \tag{8}$$

onde A é uma constante.

Vamos aplicar o método de Fourier para resolver o PVIF. Devido a condição (7) é conveniente introduzir a transformada seno de Fourier:

$$F(\xi) := \int_0^{\infty} f(x)\sin\xi x \; dx \tag{9}$$

definida para todo $\xi \in \mathbb{R}$. Note que F é uma função ímpar: $F(-\xi) = -F(\xi)$.

Se $\tilde{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ denota a extensão de f para $x < 0$ como uma função ímpar: $\tilde{f}(x) = -f(-x)$, $x < 0$, então

$$
\begin{aligned}
F(\xi) &= \frac{1}{2i}\int_0^{\infty} f(x)\left(e^{i\xi x} - e^{-i\xi x}\right)dx \\
&= \frac{1}{2i}\left(\int_0^{-\infty} \tilde{f}(x)\; e^{-i\xi x}\; dx - \int_0^{\infty} f(x)\; e^{-i\xi x} dx\right) \\
&= \frac{i}{2}\left(\int_{-\infty}^{0} \tilde{f}(x)\; e^{-i\xi x}\; dx + \int_0^{\infty} \tilde{f}(x)\; e^{-i\xi x} dx\right) \\
&= i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\widehat{\tilde{f}}(\xi)
\end{aligned} \tag{10}
$$

de onde se conclui, pela fórmula da inversa e por paridade de F,

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(x) &= \left(\widehat{\tilde{f}}\right)^{\vee}(x) \\
&= \frac{1}{i}\sqrt{\frac{2}{\pi}}F^{\vee}(x) \\
&= \frac{1}{i\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)e^{i\xi x}d\xi \\
&= \frac{1}{i\pi}\int_{0}^{\infty} F(\xi)\left(e^{i\xi x} - e^{-i\xi x}\right)d\xi \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} F(\xi)\sin\xi x \; d\xi \qquad (11)
\end{aligned}$$

e

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} F(\xi)\sin\xi x \; d\xi \qquad (12)$$

define para $x \geq 0$ a transformada seno inversa de F.

Denotando por

$$U(t,\xi) = \int_{0}^{\infty} u(t,x)\sin\xi x \; dx \qquad (13)$$

a transformada seno de Fourier com respeito a x da solução $u(t,x)$ do PVIF, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\kappa}U_t &= \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\kappa}u_t(t,x)\sin\xi x \; dx \\
&= \int_{0}^{\infty} u_{xx}(t,x)\sin\xi x \; dx \qquad (14)
\end{aligned}$$

pela equação (6), a qual pode ser integrada por partes duas vezes consecutivas:

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\infty} u_{xx}(t,x)\sin\xi x \; dx &= u_x \sin\xi x|_0^{\infty} - \xi\int_{0}^{\infty} u_x(t,x)\cos\xi x \; dx \\
&= -\xi\left(u\cos\xi x|_0^{\infty} + \xi\int_{0}^{\infty} u(t,x)\sin\xi x \; dx\right) \\
&= \xi u(t,0) - \xi^2 U \qquad (15)
\end{aligned}$$

onde assumimos a condição

$$u(t,\infty) = u_x(t,\infty) = 0$$

necessária para as transformadas seno de u, dada por (13), e de u_x estejam definidas no sentido de uma integral de Riemann imprópria.

Pelas equações (14), (15) e (7), concluimos que a transformada seno U de u satisfaz

$$U_t + \xi^2 U = \xi A \qquad (16)$$

sujeita, devido a (9), (8) e (13), á condição inicial

$$U(0, \xi) = F(\xi) \ . \tag{17}$$

Para cada $\xi \in \mathbb{R}$ fixo, a solução do PVI, (16) e (17), pode ser obtida pela fórmula da variação dos parâmetros

$$\begin{aligned} U(t, \xi) &= F(\xi) e^{-\kappa\xi^2 t} + \kappa \int_0^t \xi A e^{-\kappa\xi^2(t-s)} ds \\ &= F(\xi) e^{-\kappa\xi^2 t} + \frac{A}{\xi}\left(1 - e^{-\kappa\xi^2 t}\right) \\ &= i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\widehat{\tilde{f}}(\xi)\hat{\phi}(t, \xi) + \frac{A}{\xi}\left(1 - \hat{\phi}(t, \xi)\right) \end{aligned} \tag{18}$$

por (10), onde ϕ é a transformada de Fourier inversa

$$\begin{aligned} \phi(t, x) &= \left(\hat{\phi}\right)^{\vee}(t, x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(t, \xi)\ e^{i\xi x}\ d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\kappa t}} e^{-x^2/4\kappa t} \end{aligned} \tag{19}$$

da função Gaussiana $\hat{\phi}(t, \xi) = e^{-k\xi^2 t}$.

Para calcular a transformada seno inversa u de U dada, analogamente a (12), por

$$u(t, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} U(t, \xi) \sin \xi x\ d\xi \tag{20}$$

vamos usar para o primeiro termo de (18) a relação correspondente a (10):

$$U(t, \xi) = i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\widehat{\tilde{u}}(t, \xi)$$

juntamente com o teorema da convolução. Escrevendo

$$U^{\mathrm{h}}(t, \xi) = i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\widehat{\tilde{f}}(\xi)\hat{\phi}(t, \xi)$$

temos, lembrando que $\widehat{\tilde{f}}(\xi)$ e, consequentemente, $U^{\mathrm{h}}(t, \xi)$ são funções ímpares de ξ,

$$\begin{aligned} u^{\mathrm{h}}(t, x) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} U^{\mathrm{h}}(t, \xi) \sin \xi x\ d\xi \\ &= \frac{1}{i}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\widehat{\tilde{u}}^{\mathrm{h}}\right)^{\vee}(t, x) \\ &= \left(\widehat{\tilde{f}}(\xi)\hat{\phi}(t, \xi)\right)^{\vee}(t, x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \phi * \tilde{f}(x) \end{aligned} \tag{21}$$

por (11) e teorema da convolução.

Para o segundo termo de (18) usamos a relação correspondente a (12)

$$U^{\rm nh}(t,\xi) = \frac{A}{\xi}\Big(1-\hat\phi(t,\xi)\Big)$$

juntamente com o teorema de Plancherel–Parseval (veja Teorema 6.5 do livro texto "Análise de Fourier e equações diferenciais parciais", Djairo G. de Figueiredo). Para $x \geq 0$,

$$\begin{aligned}
u^{\rm nh}(t,x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty U^{\rm nh}(t,\xi)\sin\xi x\ d\xi \\
&= \frac{2A}{\pi}\int_0^\infty \Big(1-\hat\phi(t,\xi)\Big)\frac{\sin\xi x}{\xi}\ d\xi \\
&= \frac{A}{\pi}\left(\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin\xi x}{\xi}\ d\xi - \int_{-\infty}^\infty \hat\phi(t,\xi)\frac{\sin\xi x}{\xi}\ d\xi\right) \\
&= \frac{A}{\pi}\left(\int_{-\infty}^\infty \hat\chi(\xi)\ d\xi - \int_{-\infty}^\infty \hat\phi(t,\xi)\ \hat\chi(\xi)\ d\xi\right) \qquad (22)
\end{aligned}$$

onde $\chi(y)=\chi_x(y)=\sqrt{\pi/2}$ para $|y|\leq x$ e $\chi(y)=0$ para $|y|>x$ e

$$\begin{aligned}
\hat\chi(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \chi(y)\ e^{-i\xi y}\ dy \\
&= \frac{1}{2}\int_{-x}^x e^{-i\xi y}\ dy \\
&= \frac{\sin\xi x}{\xi}
\end{aligned}$$

coincide com a função $\hat\chi$ definida em (22).

O primeiro termo do lado direito de (22) pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\frac{A}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \hat\chi(\xi)\ d\xi &= A\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty \hat\chi(\xi)e^{i\xi\cdot 0}\ d\xi \\
&= A\sqrt{\frac{2}{\pi}}\chi(0) = A\ . \qquad (23)
\end{aligned}$$

Aplicando a igualdade de Plancherel–Parseval ao segundo termo do lado direito de (22), juntamente *com (19), temos*

$$
\begin{aligned}
\frac{A}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\phi}(t,\xi)\ \hat{\chi}(\xi)\ d\xi &= \frac{A}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(t,y)\ \chi(y)\ dy \\
&= \frac{A}{\pi}\int_{-x}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\kappa t}}e^{-y^2/4\kappa t}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,dy \\
&= A\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{x/\sqrt{4\kappa t}} e^{-s^2}ds \\
&= A\,\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4\kappa t}}\right) \qquad (24)
\end{aligned}
$$

onde $\mathrm{erf}\,(x) = \sqrt{2/\pi}\displaystyle\int_0^x e^{-s^2}ds$ *é a função erro.*

Combinando (20), (21), (22), (23) e (24), resulta a expressão desejada:

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= u^{\mathrm{h}}(t,x) + u^{\mathrm{nh}}(t,x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\phi * \tilde{f}(x) + A\left[1-\mathrm{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4\kappa t}}\right)\right] .
\end{aligned}
$$

Bibliografia. Djairo G. de Figueiredo "Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais" págs. 220-221.