Nona Lista de Exercícios de Física Matemática I

(Transformada de Fourier, Convolução e Inversa: Aplicações em EDP)

IFUSP - 12 Junho 2015

Exercício 1 *Use a transformada de Fourier para obter a fórmula de D' Alembert*

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(f(x+vt) + f(x-vt)\right) + \frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt} g(y)dy$$

para o problema de valor inicial (PVI) de uma corda elástica infinita:

$$\frac{1}{v^2}u_{tt} - u_{xx} = 0 \ , \qquad t > 0 \ , \ x \in \mathbb{R}$$

com

$$u(0,x) = f(x) \qquad e \qquad u_t(0,x) = g(x) \ , \qquad x \in \mathbb{R}$$

Exercício 2 *Considere o problema de valor inicial e de fronteira (PVIF)*

$$\frac{1}{\kappa}u_t - u_{xx} = 0 \ , \qquad t > 0 \ , \ x > 0$$

$$u(t,0) = A \ , \qquad t > 0$$

e

$$u(0,x) = f(x) \ , \qquad x \geq 0 \ ,$$

onde A é uma constante. Mostre que a solução deste problema é dada por

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\phi * \tilde{f}(x) + A\left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4\kappa t}}\right)\right]$$

onde $\operatorname{erf}(x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-s^2}\,ds$ *é a função erro,* $\tilde{f}(x)$ *é a extensão de f para $x < 0$ como uma função ímpar:* $\tilde{f}(x) = -f(-x)$ *se $x < 0$ e* $\phi(x) = (1/\sqrt{2\kappa t})\exp(-x^2/4\kappa t)$ *é a transformada de Fourier inversa de* $\Phi(\xi) = e^{-k\xi^2 t}$*:* $\phi(x) = \Phi^{\vee}(x) = (1/\sqrt{2\pi})\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\xi)e^{i\xi x}d\xi$.

Indicação. Veja págs. 220 e 221 do livro texto de Djairo G. de Figueiredo “Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais”.